Nom et prénom : PCSI

Interrogation 32

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathscr{B} = (P_0, \dots, P_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :

$$\forall (P,Q) \in \left(\mathbb{R}_n[X]\right)^2, \quad \langle P, Q \rangle \ = \ \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)\ Q^{(k)}(1)$$

1. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

Démonstration.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme sur $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$

  Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$.

  On remarque : $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)\ Q^{(k)}(1) \in \mathbb{R}$.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique

  Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} \langle Q, P \rangle &= \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(1) \times P^{(k)}(1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) \times Q^{(k)}(1) && \textit{(car la loi } \times \textit{ est commutative)} \\ &= \langle P, Q \rangle \end{aligned}$$

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite

  Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

  Soit $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$.

  Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} \langle P, \mu_1 \cdot Q_1 + \mu_2 \cdot Q_2 \rangle &= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)\ (\mu_1 \cdot Q_1 + \mu_2 \cdot Q_2)^{(k)}(1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)\ (\mu_1 \cdot Q_1^{(k)} + \mu_2 \cdot Q_2^{(k)})(1) && \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)\ \left(\mu_1\, Q_1^{(k)}(1) + \mu_2\, Q_2^{(k)}\right) && \textit{(par linéarité de l'évaluation en 1)} \\ &= \mu_1 \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)\ Q_1^{(k)}(1) + \mu_2 \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)\ Q_2^{(k)}(1) && \textit{(par linéarité de la somme)} \\ &= \mu_1\ \langle P, Q_1 \rangle\ +\ \mu_2\ \langle P, Q_2 \rangle \end{aligned}$$

  L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche, car elle est :

  × symétrique,

  × linéaire à droite.

  On en conclut que c'est une forme (c'est une application à valeurs dans $\mathbb{R}$) bilinéaire symétrique.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive

  Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

  × Tout d'abord :
  $$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)\ P^{(k)}(1) = \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(1)\right)^2$$
  Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\left(P^{(k)}(1)\right)^2 \geqslant 0$.
  Ainsi :
  $$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(1)\right)^2 \geqslant 0$$

  × Supposons maintenant : $\langle P, P \rangle = 0$. Démontrons : $P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.
  On sait :
  $$\sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(1)\right)^2 \ = \ \langle P, P \rangle \ = \ 0$$
  De plus :
  $$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \left(P^{(k)}(1)\right)^2 \ \geqslant \ 0$$
  Or, une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls.
  On en conclut :

  $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \left(P^{(k)}(1)\right)^2 = 0$

  donc $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P^{(k)}(1) = 0$ *(par injectivité de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$)*

  donc 1 est racine d'ordre au moins $n+1$ de P

  donc $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ *(car : $\deg(P) \leqslant n$)*

  L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, symétrique et définie-positive. C'est donc bien un produit scalaire.

□

2. Démontrer, sans en déterminer une base, que l'ensemble $E = \{O \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et en donner la dimension.

Démonstration.
On note :
$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & P & \mapsto & P(1) \end{array}$$

- L'application φ est
  × linéaire car il s'agit de l'évaluation en 1,
  × à valeur dans $\mathbb{R}$,
  × non nulle. En effet : $\varphi(P_0) = P_0(1) = 1 \neq 0$.

  Ainsi, l'application φ est une forme linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$.

- On remarque :
  $$E \ = \ \mathrm{Ker}(\varphi)$$
  Ainsi, E est le noyau d'une forme linéaire non nulle. C'est donc un hyperplan de E.

  On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et :
  $$\dim(E) \ = \ \dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) - 1 \ = \ n.$$

□

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Calculer $\langle P_0, P\rangle$.

Démonstration.
On remarque :

$$\begin{aligned}
\langle P_0, P\rangle &= \sum_{k=0}^{n} P_0^{(k)}(1)\ P^{(k)}(1) \\
&= P_0^{(0)}(1)\ P^{(0)}(1) + \sum_{k=0}^{n} P_0^{(k)}(1)\ P^{(k)}(1) \\
&= P_0(1)\,P(1) + \sum_{k=0}^{n} 0 \times P^{(k)}(1) \qquad \textit{(car : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P_0^{(k)} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}\textit{)} \\
&= P(1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle P_0, P\rangle = P(1)}$$

□

4. Calculer la distance de P_0 à E.

Démonstration.

- Tout d'abord, en notant $p_E(P_0)$ la projection orthogonale sur E :

$$\mathrm{d}(P_0, E) = \|P_0 - p_E(P_0)\|$$

- On remarque :

$$\begin{aligned}
E &= \{P \in E \mid P(1) = 0\} \\
&= \{P \in E \mid \langle P_0, P\rangle = 0\} \\
&= \big(\mathrm{Vect}\,(P_0)\big)^{\perp}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } p_E(P_0) = 0_E.}$$

- Ainsi :

$$\mathrm{d}(P_0, E) = \|P_0\|$$

De plus :

$$\|P_0\|^2 = \langle P_0, P_0\rangle = \sum_{k=0}^{n} \big(P_0^{(k)}(1)\big)^2 = \big(P_0^{(0)}(1)\big)^2 = 1^2 = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{d}(P_0, E) = \sqrt{1} = 1.}$$

□