Nom et prénom : PCSI

Interrogation 32

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathscr{B} = (P_0, \dots, P_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :

$$\forall (P, Q) \in \left(\mathbb{R}_n[X]\right)^2, \quad \langle P, Q \rangle \ = \ \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)\, Q^{(k)}(1)$$

1. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

2. Démontrer, sans en déterminer une base, que l'ensemble $E = \{O \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et en donner la dimension.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Calculer $\langle P_0, P \rangle$.

4. Calculer la distance de P_0 à E.