DS2



On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 9. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Énoncer la formule du binôme de Newton.

Démonstration.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

□

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\sum_{k=1}^{n} k^3$? Le démontrer.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

- **Initialisation** :
  - × D'une part : $\sum_{k=1}^{0} k^3 = \sum_{k\in\varnothing} k^3 = 0$.
  - × D'autre part : $\frac{0^2 \times (0+1)^2}{4} = 0$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$)

$$\begin{aligned}
\text{On écrit : } \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= (\sum_{k=1}^{n} k^3) + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\,(n^2 + 4(n+1)) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\,(n^2 + 4n + 4) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\,(n+2)^2
\end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

□

3. (∗) On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$$

Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $f = f_2 \circ f_1$ de :

- $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ qui est :
  - × dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$,
  - × telle que : $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$.
- $f_2 : x \mapsto \ln(x)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

□

4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.
Démontrer que toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Démonstration.
Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.
On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse** : Supposons qu'il existe deux fonctions $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ telles que :
  1) $f = g + h$,
  2) g est paire,
  3) h est impaire.

  On remarque tout d'abord, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ (car l'intervalle I est symétrique par rapport à 0) et :

$$\begin{aligned} f(-x) &= (g+h)(-x) && \textit{(d'après 1))} \\ &= g(-x) + h(-x) && \\ &= g(x) - h(x) && \textit{(car } g \textit{ paire et } h \textit{ impaire)} \end{aligned}$$

  On obtient ainsi le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} g(x) & + & h(x) & = & f(x) \\ g(x) & - & h(x) & = & f(-x) \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} g(x) & + & h(x) & = & f(x) \\ & - & 2\,h(x) & = & -f(x) + f(-x) \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,g(x) & & & = & f(x) + f(-x) \\ & - & 2\,h(x) & = & -f(x) + f(-x) \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} g(x) & = & \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h(x) & = & \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}\right.$$

- **Synthèse** : On pose

$$\begin{array}{rcl} g_0 : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} h_0 : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array}$$

On remarque alors :

× tout d'abord : $f = g_0 + h_0$. En effet, pour tout $x \in I$:

$$(g_0+h_0)(x) = g_0(x)+h_0(x) = \frac{f(x)+\cancel{f(-x)}}{2} + \frac{f(x)-\cancel{f(-x)}}{2} = \frac{\cancel{2}\,f(x)}{\cancel{2}} = f(x)$$

× ensuite, g_0 est paire. En effet, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ et :

$$g_0(-x) = \frac{f(-x)+f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g_0(x)$$

× enfin, h_0 est impaire. En effet, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ et :

$$h_0(-x) = \frac{f(-x)-f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h_0(x)$$

Ainsi, toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Commentaire

Détaillons les attentes d'un raisonnement par analyse-synthèse.

- Dans la première partie du raisonnement, on suppose qu'il existe des fonctions g et h telles que f est de la forme souhaitée. En se basant sur cette hypothèse, on obtient une caractérisation des fonctions g et h :

$$g : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Il faut bien comprendre que dans cette première partie du raisonnement, on a **supposé** (et non démontré !) l'existence de deux fonctions g et h. C'est pourquoi il faut, dans la deuxième partie du raisonnement, démontrer l'existence de telles fonctions.
L'idée est alors de d'introduire les fonctions g_0 et h_0 telles que caractérisées dans la partie **analyse** et de **démontrer** que l'on obtient ainsi des fonctions qui satisfont les exigences de la question.

- En résumé, un raisonnement par **analyse-synthèse** se déroule en deux temps :
  × **analyse** : on suppose l'existence d'un objet vérifiant certains critères (ici, on suppose l'existence de fonctions g et h). Si cet objet existe, il est alors d'une certaine forme ($g : x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$).
  × **synthèse** : on vérifie que l'objet obtenu lors de la phase d'analyse répond bien aux critères initiaux (les fonctions g_0 et h_0 ainsi construites permettent bien de décomposer f sous la forme souhaitée).
  Cela permet de lever la réserve d'existence.

Ce schéma de démonstration permet non seulement de conclure :

$$\begin{array}{c}\text{l'objet répond à}\\ \text{certains critères}\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c}\text{l'objet s'écrit sous une}\\ \text{forme particulière}\end{array}$$

mais aussi de démontrer que chacune des deux propositions de l'équivalence est vérifiée. □

5. Soient E, F et G des ensembles. Soient f une application de E dans F, et g une application de F dans G.

a) $(*)$ Soient B_1 et B_2 deux parties de F. Démontrer :

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) \;=\; f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

Démonstration.
On procède par double inclusion.

$(\subset)$ Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.
Alors : $f(x) \in B_1 \cap B_2$.

- D'une part : $f(x) \in B_1$. Donc : $x \in f^{-1}(B_1)$.
- D'autre part : $f(x) \in B_2$. Donc : $x \in f^{-1}(B_2)$.

Ainsi : $\big(x \in f^{-1}(B_1)\big)$ `ET` $\big(x \in f^{-1}(B_2)\big)$.
On en déduit : $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Ainsi : $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

$(\supset)$ Soit $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

- D'une part : $x \in f^{-1}(B_1)$. Donc : $f(x) \in B_1$.
- D'autre part : $x \in f^{-1}(B_2)$. Donc : $f(x) \in B_1$.

Ainsi : $\big(f(x) \in B_1\big)$ `ET` $\big(f(x) \in B_2\big)$.
Donc : $f(x) \in B_1 \cap B_2$.
On en déduit : $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

Ainsi : $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

Finalement : $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

□

b) $(*)$ Démontrer que, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Démonstration.
Supposons que $g \circ f$ est injective. Démontrons que f est injective.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Supposons : $f(x_1) = f(x_2)$.
Alors : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
(égalité obtenue en composant chaque membre de l'égalité précédente par g)
Autrement dit : $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$.
Or, l'application $g \circ f$ est injective, donc : $x_1 = x_2$.

Ainsi f est injective.

Finalement, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

□

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner un encadrement optimal de $\lfloor x \rfloor$.

Démonstration.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

□

Exercice 2 : Fonctions hyperboliques et suite récurrente

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse dans cet exercice à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Partie I : Étude des fonctions sh et f

7. Dresser le tableau de variations de la fonction sh, puis en déduire le signe de $\operatorname{sh}(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la combinaison linéaire $\operatorname{sh} = \dfrac{1}{2}\cdot f_1 + \dfrac{1}{2}\cdot f_2$ de :
  - × $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$,
  - × $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.

  La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x - (-\mathrm{e}^{-x})}{2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \\ &= \operatorname{ch}(x) \end{aligned}$$

  Or $\mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Donc : $\operatorname{sh}'(x) > 0$.
- On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\operatorname{sh}'(x)$		$+$		$+$	
Variations de sh	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
Signe de $\operatorname{sh}(x)$		$-$	0	$+$	

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - × Tout d'abord : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$.

    $$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty.}$$

  - × De plus : Tout d'abord : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.

    $$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty.}$$

- Détaillons enfin l'obtention de la dernière ligne du tableau.
  La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient alors :
  - × $\forall x \leqslant 0,\ \operatorname{sh}(x) \leqslant \operatorname{sh}(0) = 0$.
  - × $\forall x \geqslant 0,\ \operatorname{sh}(x) \geqslant \operatorname{sh}(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \operatorname{sh}(x) \leqslant 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \operatorname{sh}(x) \geqslant 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

□

8. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.
La fonction sh est :
× continue (car dérivable) sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$,
× strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$, d'après la question précédente.
Ainsi sh réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $\operatorname{sh}(]-\infty, +\infty[)$, où :

$$\operatorname{sh}(]-\infty, +\infty[) = \left]\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh}(x), \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x)\right[=]-\infty, +\infty[$$

$$\boxed{\text{La fonction sh réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

□

9. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
On admettra dans la suite que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(0) = 0$.

Démonstration.
- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est le quotient $f = \dfrac{g_1}{g_2}$ de :
  - × $g_1 : x \mapsto x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction polynomiale,
  - × $g_2 : x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ qui :
    - est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 7,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_-^* \text{ et sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = \frac{1 \times \operatorname{sh}(x) - x \times \operatorname{sh}'(x)}{(\operatorname{sh}(x))^2} = \frac{\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)}{(\operatorname{sh}(x))^2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } f' : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)}{(\operatorname{sh}(x))^2}.}$$

□

10. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = \mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)$$

Étudier les variations de h, puis en déduire le signe de $h(x)$.

Démonstration.

- La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est la somme $h = h_1 - h_2$ de :
  - $h_1 : x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ d'après ***9***,
  - $h_2 : x \mapsto x\ \mathrm{ch}(x)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

  La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$h'(x) = \cancel{\mathrm{ch}(x)} - (\cancel{1 \times \mathrm{ch}(x)} + x \times \mathrm{sh}(x)) = -x\ \mathrm{sh}(x)$$

  Or :
  - d'une part : $x \geqslant 0$,
  - d'autre part, d'après ***7***, comme $x \in \mathbb{R}_+$, on sait : $\mathrm{sh}(x) \geqslant 0$.

  On en déduit : $h'(x) \leqslant 0$.

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	0	$-$
Variations de h	0 ↘	$-\infty$
Signe de $h(x)$	0	$-$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord :

$$h(0) = \mathrm{sh}(0) - \cancel{0 \times \mathrm{ch}(0)} = 0$$

    $h(0) = 0$

  - De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$h(x) = \mathrm{sh}(x) - x\ \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} - x\,\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = x\,\mathrm{e}^x\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right) - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} - x\,\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

    Or :

    - tout d'abord : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

      Ensuite : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^x = +\infty$. On en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^x\left(\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2}\right) = -\infty$.

    - de plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2} = 0$.

    - enfin, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$.

    Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

- Détaillons enfin l'obtention de la dernière ligne du tableau.
  La fonction h est décroissante sur $[0, +\infty[$. Ainsi :

$$\forall x \geqslant 0, \quad h(x) \leqslant h(0) = 0$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h(x) \leqslant 0}$$

□

11. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question ***9*** :

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x) - x\ \operatorname{ch}(x)}{\big(\operatorname{sh}(x)\big)^2} = \frac{h(x)}{\big(\operatorname{sh}(x)\big)^2}$$

  Or :
  - × d'une part, d'après la question précédente : $h(x) \leqslant 0$,
  - × d'autre part : $\big(\operatorname{sh}(x)\big)^2 > 0$.

  On en déduit : $f'(x) \leqslant 0$.
- On obtient le tableau de variations suivant sur $\mathbb{R}_+$. (On rappelle que, d'après l'énoncé, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(0) = 0$)

x	0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	0	$-$	
Variations de f	1	↘	0

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - × Tout d'abord, d'après l'énoncé : $f(0) = 1$.

$$\boxed{f(0) = 1}$$

  - × Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{x}{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \frac{2x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \frac{2x}{\mathrm{e}^x} \times \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-2x}}$$

  Or :
  - d'une part, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$,
  - d'autre part : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-2x}} = 1$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

- On cherche maintenant à déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
  - × Pour cela, on va commencer par déterminer la parité de f.
    Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
    - si $x \neq 0$, alors $-x \neq 0$ et :

$$f(-x) = \frac{-x}{\mathrm{sh}(-x)} = -\frac{x}{\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-(-x)}}{2}} = -\frac{2x}{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}} = \frac{2x}{-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}} = \frac{x}{\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}} = \frac{x}{\mathrm{sh}(x)} = f(x)$$

    - si $x = 0$, alors $-0 = 0$ et :

$$f(-0) = f(0)$$

    La fonction f est donc paire.
  - × On obtient, par parité de f, le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f	0	↗	1	↘	0

□

Partie II : Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On donne :

$$f\left(\tfrac{4}{5}\right) \leqslant 1, \qquad f(1) \geqslant \tfrac{4}{5},$$
$$\mathrm{sh}\left(\tfrac{4}{5}\right) \leqslant 1, \qquad \mathrm{sh}(1) \geqslant 1$$

12. Démontrer : $f\left(\left[\tfrac{4}{5}, 1\right]\right) \subset \left[\tfrac{4}{5}, 1\right]$.

Démonstration.

- Soit $x \in \left[\tfrac{4}{5}, 1\right]$.

$$\begin{array}{rccccl} & \frac{4}{5} & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\ \text{donc} & f\left(\frac{4}{5}\right) & \geqslant & f(x) & \geqslant & f(1) \end{array} \quad \begin{array}{l}\textit{(par décroissance}\\ \textit{de } f \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)}\end{array}$$

  Or, d'après les données de l'énoncé :
  - × d'une part : $f(1) \geqslant \dfrac{4}{5}$,
  - × d'autre part : $f\left(\tfrac{4}{5}\right) \leqslant 1$

  Ainsi, par transitivité :

$$\frac{4}{5} \leqslant f(1) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant 1$$

  Autrement dit : $f(x) \in \left[\tfrac{4}{5}, 1\right]$.

  Finalement : $f\left(\left[\tfrac{4}{5}, 1\right]\right) \subset \left[\tfrac{4}{5}, 1\right]$

□

13. (∗) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$$

Commentaire

Notons que la suite (u_n), définie par récurrence au début de l'énoncé, est automatiquement bien définie, car la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.

- **Initialisation** :
  On remarque : $u_0 = 1 \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$).
  Par hypothèse de récurrence : $u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.
  Or, d'après ce qui précède : $f\left(\left[\frac{4}{5}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{4}{5}, 1\right]$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.

□

14. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
(on pourra utiliser la question 8, sans chercher à déterminer α)

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x = 0$, alors :
  $$f(0) = 1 \neq 0$$
  On en déduit que 0 n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$.
- Si $x \neq 0$, alors :
  $$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x}{\mathrm{sh}(x)} = x \\ &\Leftrightarrow x = x\,\mathrm{sh}(x) \\ &\Leftrightarrow 1 = \mathrm{sh}(x) \qquad (\textit{car } x \neq 0) \end{aligned}$$
  Or, d'après la question 8, la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
  De plus : $1 \in \mathbb{R}$. L'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Finalement, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

□

15. Donner un encadrement de α et justifier :

$$\forall x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right],\ \frac{h(1)}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\mathrm{sh}^2(1)}$$

Démonstration.

- D'après les données de l'énoncé : $\mathrm{sh}\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant 1 \leqslant \mathrm{sh}(1)$. Donc :
  $$\mathrm{sh}\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant \mathrm{sh}(\alpha) \leqslant \mathrm{sh}(1)$$

Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $\mathrm{sh}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En appliquant sh^{-1}, on obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{sh}^{-1}\left(\mathrm{sh}\left(\frac{4}{5}\right)\right) & \leqslant & \mathrm{sh}^{-1}\left(\mathrm{sh}(\alpha)\right) & \leqslant & \mathrm{sh}^{-1}\left(\mathrm{sh}(1)\right) \\ = & & = & & = \\ \frac{4}{5} & \leqslant & \alpha & \leqslant & 1 \end{array}$$

Ainsi : $\frac{4}{5} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

- Soit $x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.
  - × Tout d'abord, d'après la question ***10***, la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On obtient :

$$h\left(\frac{4}{5}\right) \geqslant h(x) \geqslant h(1)$$

On a même, toujours d'après la question ***10*** :

$$0 \geqslant h\left(\frac{4}{5}\right) \geqslant h(x) \geqslant h(1)$$

Ainsi :

$$0 \leqslant -h\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant -h(x) \leqslant -h(1)$$

  - × De plus, d'après ***7***, la fonction sh est croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient :

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathrm{sh}\left(\frac{4}{5}\right) & \leqslant & \mathrm{sh}(x) & \leqslant & \mathrm{sh}(1) & \\ \text{donc} & \frac{1}{(\mathrm{sh}(\frac{4}{5}))^2} & \geqslant & \frac{1}{(\mathrm{sh}(x))^2} & \geqslant & \frac{1}{(\mathrm{sh}(1))^2} & \begin{array}{l}\textit{(par stricte décroissance de}\\ x \mapsto \frac{1}{x^2} \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)}\end{array} \end{array}$$

Ainsi :

$$0 \leqslant \frac{1}{(\mathrm{sh}(1))^2} \leqslant \frac{1}{(\mathrm{sh}(x))^2} \leqslant \frac{1}{(\mathrm{sh}(\frac{4}{5}))^2}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} -\frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\mathrm{sh}^2(1)} & \leqslant & -\frac{h(x)}{\mathrm{sh}^2(x)} & \leqslant & -\frac{h(1)}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \\ & & = & & \\ & & -f'(x) & & \end{array}$$

Ainsi : $\forall x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right], \ \frac{h(1)}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\mathrm{sh}^2(1)}$

□

16. On donne : $\dfrac{h(1)}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\mathrm{sh}^2(1)} \leqslant 0$.

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Puis :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Démonstration.

- Soit $x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$. D'après la question ***15*** :

$$\frac{h(1)}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\mathrm{sh}^2(1)}$$

On en déduit, avec les données de l'énoncé :

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{h(1)}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\mathrm{sh}^2(1)} \leqslant 0 \leqslant \frac{1}{2}$$

Autrement dit : $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

- On sait alors que :
  - × f est dérivable sur $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$,
  - × $\forall x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in \left[\frac{4}{5}, 1\right],\ |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|y - x|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$ (d'après ***13***) et $x = \alpha \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$ (d'après ***15***), on obtient :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Or :

- × d'une part : $u_{n+1} = f(u_n)$,
- × d'autre part, par définition de α en question ***14*** : $f(\alpha) = \alpha$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

  ▶ **Initialisation** :
  On sait : $u_0 = 1$. Or, d'après ***15*** :

$$\begin{array}{rccccc} & \frac{4}{5} & \leqslant & \alpha & \leqslant & 1 \\ \text{d'où} & 1 - \frac{4}{5} & \geqslant & 1 - \alpha & \geqslant & 1 - 1 \\ \text{ainsi} & \frac{1}{5} & \geqslant & u_0 - \alpha & \geqslant & 0 \end{array}$$

On en déduit : $|u_0 - \alpha| = u_0 - \alpha \leqslant \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$).

  D'après la question précédente : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.

  Or, par hypothèse de récurrence : $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

  En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &\leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha| \\ &\leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\ &\leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

□

17. En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
On sait :

× d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

× $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 0$, car : $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$.

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \alpha) = 0$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

□

18. Écrire une fonction en **Python** qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie la valeur de $u_{\texttt{n}}$.

Démonstration.
On propose le script suivant.

```
1  import numpy as np
2  def suite_u(n) :
3      u = 1
4      for i in range(1,n+1) :
5          u = 2 * u / (np.exp(u) - np.exp(-u))
6      return u
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  - × cette fonction se nomme `suite_u`,
  - × elle prend en paramètre la variable `n`,
  - × elle admet pour variable de sortie la variable `u`.

```
2  def suite_u(n) :
```

```
6      return u
```

  La variable `u` qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n) est initialisée à 1 : la valeur de u_0.

```
3      u = 1
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 4 à 5 consistent à calculer les valeurs successives de la suite (u_n).
  Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for) :

```
4      for i in range(1,n+1) :
5          u = 2 * u / (np.exp(u) - np.exp(-u))
```

  On tire ici partie de la définition récursive (d'ordre 1) de cette suite. La nouvelle valeur de la suite, que l'on stockera dans la variable `u`, est obtenue à l'aide de la valeur précédente qui est celle alors stockée dans `u`.
- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `u` contient la quantité $u_{\texttt{n}}$ où `n` est le paramètre entré lors de l'appel de la fonction.

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un script **Python** correct démontre la bonne ocmpréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
  On procèdera de même dans les autres questions **Python**.
- Le script **Python** consiste à mettre à jour successivement la variable `u` jusqu'à obtention de la valeur que l'on souhaite calculer. L'idée est la suivante.
  Si avant le $i^{\text{ème}}$ tour de boucle (avec $\texttt{i} \in [\![1, \texttt{n}]\!]$) :

  la variable `u` contient la valeur u_{i-1}

  alors, à l'issue de ce tour de boucle :

  la variable `u` contient la valeur u_i

  Cette propriété est ce qu'on appelle un **invariant de boucle**. Elle permet d'assurer la correction de la fonction implémentée et notamment le fait qu'à l'issue du dernier tour de boucle la variable `u` contient $u_{\texttt{n}}$.

□

19. a) Déterminer un entier n_0 à partir duquel : $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}$.

Démonstration.

- D'après la question ***16***, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Il suffit alors de trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-4}$.
  Si c'est le cas, par transitivité :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-4}$$

- Déterminons alors un entier n_0 vérifiant : $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-4}$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-4} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 5\times 10^{-4} \\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \ln(5) - 4\ln(10) && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\
&\Leftrightarrow -n\ln(2) \leqslant \ln(5) - 4\big(\ln(5)+\ln(2)\big) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{3\ln(5)+4\ln(2)}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

En choisissant $n_0 = \left\lceil \frac{3\ln(5)+4\ln(2)}{\ln(2)} \right\rceil$ (ou tout entier supérieur), on obtient bien :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}$$

On pose finalement : $n_0 = \left\lceil \frac{3\ln(5)+4\ln(2)}{\ln(2)} \right\rceil$.

□

b) Déduire de cette inégalité une fonction **Python** permettant de déterminer une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Démonstration.
D'après l'inégalité de la question précédente, le réel u_{n_0} est une valeur de α à 10^{-4} près. On en déduit donc le script suivant :

```
1  def alpha_approx() :
2      n = np.ceil((3 * np.log(5) + 4 * np.log(2)) / np.log(2))
3      return suite_u(n)
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  - × cette fonction se nomme `alpha_approx`,
  - × elle ne prend pas de paramètre d'entrée,

```
1  def alpha_approx() :
```

  On stocke ensuite dans une variable `n` la valeur de n_0 déterminée en question précédente.

```
2      n = np.ceil((3 * np.log(5) + 4 * np.log(2)) / np.log(2))
```

- **Fin de la fonction**
  On souhaite enfin renvoyer la valeur de $u_{\texttt{n}}$ que l'on obtient en utilisant la fonction `suite_u` définie en question ***18***

```
3      return suite_u(n)
```

□

Exercice 3 : Fonctions homographiques

On considère la fonction g définie par :

$$g : x \mapsto \frac{2x-1}{-x+2}$$

20. (∗) Démontrer que g est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

Démonstration.

- La fonction g est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$ car elle est le quotient $g = \frac{g_1}{g_2}$ de :
  - × $g_1 : x \mapsto 2x - 1$ qui est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$,
  - × $g_2 : x \mapsto -x + 2$ qui :
    - est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$.

  La fonction g est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$.

- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2 \times (-x+2) - (2x-1) \times (-1)}{(-x+2)^2} \\ &= \frac{-\cancel{2x} + 4 + \cancel{2x} - 1}{(-x+2)^2} \\ &= \frac{3}{(-x+2)^2} \end{aligned}$$

Finalement, on obtient : $g' : x \mapsto \dfrac{3}{(-x+2)^2}$. □

21. (∗) Déterminer le tableau de variations complet de g (limites comprises).

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$g'(x) = \frac{3}{(-x+2)^2} > 0$$

- On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$		‖	$+$	
Variations de g	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-2

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - × Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$g(x) = \frac{2x-1}{-x+2} = \frac{2\cancel{x}\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{-\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)} = -2\,\frac{1-\frac{1}{2x}}{1-\frac{2}{x}}$$

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)=1$.

On en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -2$.

  - × De même, on remarque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)=1$.

On en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -2$.

  - × Ensuite : $\lim\limits_{x\to2^-}(2x-1)=3$ et $\lim\limits_{x\to2^-}(-x+2)=0^+$.

On en déduit : $\lim\limits_{x\to2^-} g(x) = +\infty$.

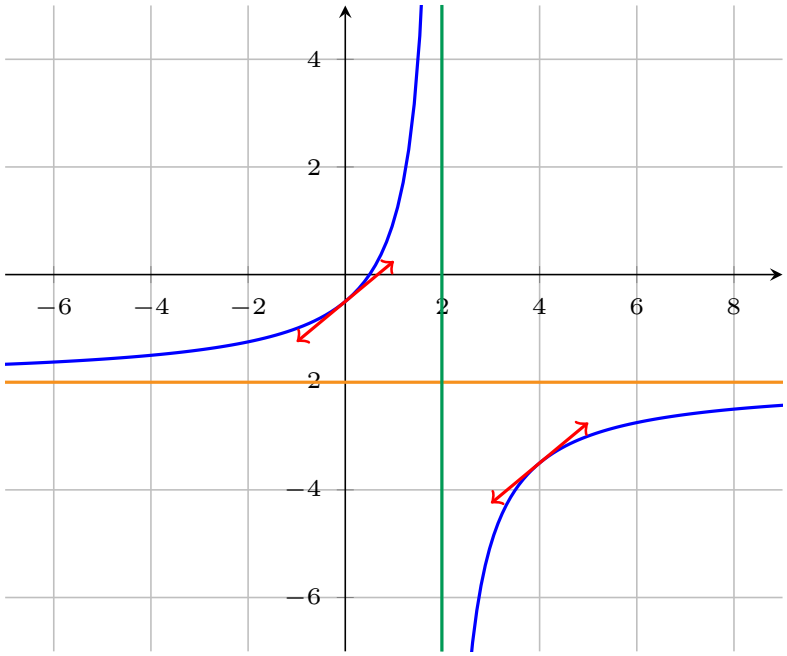
  - × Enfin : Ensuite : $\lim\limits_{x\to2^+}(2x-1)=3$ et $\lim\limits_{x\to2^+}(-x+2)=0^-$.

On en déduit : $\lim\limits_{x\to2^+} g(x) = -\infty$.

□

22. (∗) Tracer la courbe représentative de g.

Démonstration.



Commentaire

- L'équation de la tangente à la courbe représentative de g en 0 est :

$$\begin{aligned} y &= g(0) + g'(0)\,(x-0) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\,x \end{aligned}$$

- L'équation de la tangente à la courbe représentative de g en 4 est :

$$\begin{aligned} y &= g(4) + g'(4)\,(x-4) \\ &= -\frac{7}{2} + \frac{3}{4}\,(x-4) \end{aligned}$$

□

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $c \neq 0$. On définit la fonction f par :

$$f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

Une telle fonction est appelée *fonction homographique*. Notons que la fonction g est un cas particulier de fonction homographique avec $a=2$, $b=-1$, $c=-1$ et $d=2$.

23. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ de f en fonction de c et d.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{La quantité } f(x) \text{ est bien définie} &\Leftrightarrow cx+d \neq 0 \\ &\Leftrightarrow cx \neq -d \\ &\Leftrightarrow x \neq -\frac{d}{c} \end{aligned}$$

On obtient : $\mathcal{D}_{a,b,c,d} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

□

24. Déterminer les limites de f aux bords de son ensemble de définition en fonction de a, b, c et d.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}, 0\}$:

$$f(x) = \frac{a\cancel{x}\left(1+\frac{b}{ax}\right)}{c\cancel{x}\left(1+\frac{d}{cx}\right)} = \frac{a}{c}\,\frac{1+\frac{b}{ax}}{1+\frac{d}{cx}}$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{a}{c}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{a}{c}$.

- Ensuite, deux cas se présentent :
  - × si $c \geq 0$, alors :
    - ▸ d'une part : $\lim\limits_{x\to(-\frac{d}{c})^-} (cx+d) = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to(-\frac{d}{c})^+} (cx+d) = 0^+$.
    - ▸ d'autre part : $\lim\limits_{x\to-\frac{d}{c}} (ax+b) = -\dfrac{ad}{c} + b$.

Trois cas se présentent alors.

- Si $-\dfrac{ad}{c}+b>0$, alors : $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x)=+\infty$.

  On remarque de plus :

$$\begin{array}{rcll} -\dfrac{ad}{c}+b & > & 0 & \\ \Leftrightarrow \quad -ad+bc & > & 0 & (car\ c>0) \\ \Leftrightarrow \quad 0 & > & ad-bc & \end{array}$$

- Si $-\dfrac{ad}{c}+b<0$, alors : $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x)=-\infty$.

  On remarque de plus :

$$\begin{array}{rcll} -\dfrac{ad}{c}+b & < & 0 & \\ \Leftrightarrow \quad -ad+bc & < & 0 & (car\ c>0) \\ \Leftrightarrow \quad 0 & < & ad-bc & \end{array}$$

- Si $-\dfrac{ad}{c}+b=0$, alors : $b=\dfrac{ad}{c}$. Donc, pour tout $x\in\mathcal{D}_{a,b,c,d}$:

$$f(x) = \frac{ax+\frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{\frac{cax+ad}{c}}{cx+d} = \frac{a\,\cancel{(cx+d)}}{c\,\cancel{(cx+d)}} = \frac{a}{c}$$

  On en déduit dans ce cas : $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x)=\dfrac{a}{c}$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x)=\dfrac{a}{c}$.

× si $c<0$, alors :

▸ d'une part : $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} (cx+d)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} (cx+d)=0^-$

▸ d'autre part : $\lim\limits_{x\to-\frac{d}{c}} (ax+b)=-\dfrac{ad}{c}+b$.

Trois cas se présentent alors.

- Si $-\dfrac{ad}{c}+b>0$, alors : $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x)=-\infty$.

  On remarque de plus :

$$\begin{array}{rcll} -\dfrac{ad}{c}+b & > & 0 & \\ \Leftrightarrow \quad -ad+bc & < & 0 & (car\ c<0) \\ \Leftrightarrow \quad 0 & < & ad-bc & \end{array}$$

- Si $-\dfrac{ad}{c}+b<0$, alors : $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x)=+\infty$.

  On remarque de plus :

$$\begin{array}{rcll} -\dfrac{ad}{c}+b & < & 0 & \\ \Leftrightarrow \quad -ad+bc & > & 0 & (car\ c<0) \\ \Leftrightarrow \quad 0 & > & ad-bc & \end{array}$$

- Si $-\dfrac{ad}{c}+b=0$, alors avec le même raisonnement que dans le cas $c>0$, on obtient : $\lim\limits_{x\to(-\frac{d}{c})^-} f(x)=\dfrac{a}{c}$ et $\lim\limits_{x\to(-\frac{d}{c})^+} f(x)=\dfrac{a}{c}$.

Finalement, si $ad-bc>0$, alors : $\lim\limits_{x\to(-\frac{d}{c})^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-\frac{d}{c})^+} f(x)=-\infty$.

Si $ad-bc<0$, alors : $\lim\limits_{x\to(-\frac{d}{c})^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-\frac{d}{c})^+} f(x)=+\infty$.

Si $ad-bc=0$, alors : $\lim\limits_{x\to(-\frac{d}{c})^-} f(x)=\dfrac{a}{c}$ et $\lim\limits_{x\to(-\frac{d}{c})^+} f(x)=\dfrac{a}{c}$.

□

25. Démontrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ et montrer que sa dérivée est de la forme :

$$f' : x \mapsto \frac{ad-bc}{h(x)}$$

où h est une fonction que l'on explicitera.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ car elle est le quotient $f=\dfrac{f_1}{f_2}$ de :
  - × $f_1 : x \mapsto ax+b$ qui est dérivable sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ en tant que fonction polynomiale,
  - × $f_2 : x \mapsto cx+d$ qui :
    - est dérivable sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ en tant que fonction polynomiale,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$.

- Soit $x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}$.

$$f'(x) = \frac{a\times(cx+d)-(ax+b)\times c}{(cx+d)^2} = \frac{\cancel{acx}+ad-\cancel{acx}-bc}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

Finalement, $f' : x \mapsto \dfrac{ad-bc}{h(x)}$ où la fonction h est définie par $h : x \mapsto (cx+d)^2$.

□

26. Déterminer la monotonie de f. *On distinguera trois cas.*

Démonstration.
Trois cas se présentent.

- Si $ad-bc>0$, alors :

$$f(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} > 0$$

Si $ad-bc>0$, la fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty,-\frac{d}{c}[$ et sur $]-\frac{d}{c},+\infty[$.

- Si $ad-bc=0$, alors :

$$f(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = 0$$

Si $ad-bc=0$, la fonction f est donc constante sur $]-\infty,-\frac{d}{c}[$ et sur $]-\frac{d}{c},+\infty[$.

- Si $ad-bc<0$, alors :

$$f(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} < 0$$

Si $ad-bc<0$, la fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty,-\frac{d}{c}[$ et sur $]-\frac{d}{c},+\infty[$.

□

27. On considère le cas particulier : $ad-bc>0$.

a) Dresser le tableau de variations de f.

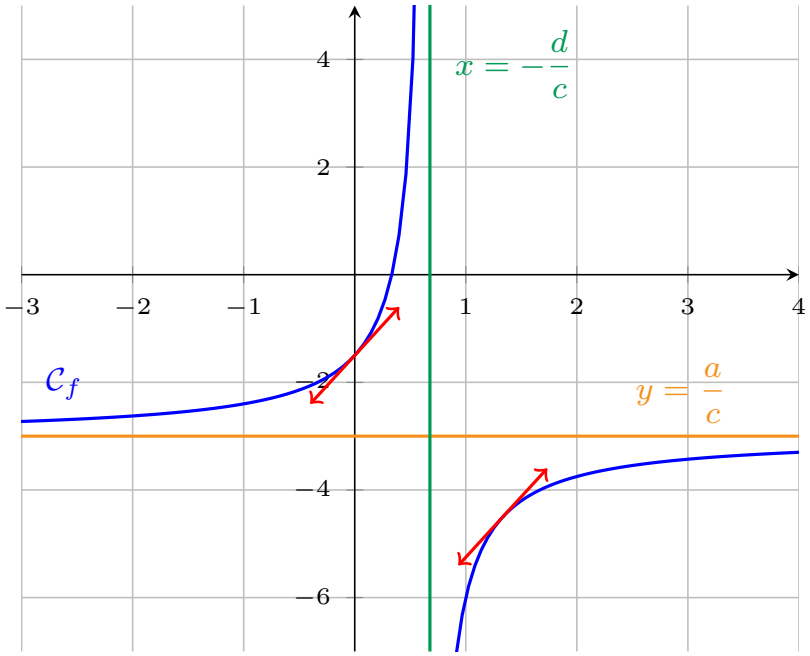
Démonstration.
Avec les questions ***24*** et ***26***, on en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$		‖	$+$	
Variations de f	$\frac{a}{c}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{a}{c}$

□

b) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Démonstration.



□

28. Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x\in\mathcal{D}_{a,b,c,d},\quad f(x)\ =\ \frac{\alpha}{x-\beta}+\gamma$$

On exprimera α, β et γ en fonction de a, b, c et d.

Démonstration.

- Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$. Soit $x\in\mathcal{D}_{a,b,c,d}$. On remarque :
  - × d'une part :
$$\frac{\alpha}{x-\beta}+\gamma\ =\ \frac{\alpha+\gamma\,(x-\beta)}{x-\beta}\ =\ \frac{\alpha+\gamma\,x-\gamma\,\beta}{x-\beta}\ =\ \frac{\gamma\,x+(\alpha-\gamma\,\beta)}{x-\beta}$$
  - × d'autre part :
$$f(x)\ =\ \frac{ax+b}{cx+d}\ =\ \frac{ax+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}\ =\ \frac{\frac{ax+b}{c}}{x+\frac{d}{c}}\ =\ \frac{\frac{a}{c}\,x+\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}$$
- On pose alors :
  - × $\beta\ =\ -\dfrac{d}{c}$
  - × $\gamma\ =\ \dfrac{a}{c}$
  - × $\alpha\ =\ \dfrac{b}{c}+\gamma\,\beta\ =\ \dfrac{b}{c}+\dfrac{a}{c}\times\left(-\dfrac{d}{c}\right)\ =\ \dfrac{b}{c}-\dfrac{ad}{c^2}\ =\ \dfrac{bc-ad}{c^2}$
- Vérifions qu'on obtient bien l'égalité souhaitée. Soit $x\in\mathcal{D}_{a,b,c,d}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{x-\beta}+\gamma\ &=\ \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x-\left(-\frac{d}{c}\right)}+\frac{a}{c}\\
&=\ \frac{bc-ad}{c^{\cancel{2}}\left(\frac{cx+d}{\cancel{c}}\right)}+\frac{a}{c}\\
&=\ \frac{bc-ad}{c\,(cx+d)}+\frac{a}{c}\\
&=\ \frac{bc-ad}{c\,(cx+d)}+\frac{a\,(cx+d)}{c\,(cx+d)}\\
&=\ \frac{bc-\cancel{ad}+acx+\cancel{ad}}{c\,(cx+d)}\\
&=\ \frac{\cancel{c}\,(ax+b)}{\cancel{c}\,(cx+d)}\\
&=\ f(x)
\end{aligned}$$

Finalement, en posant $\alpha=\dfrac{bc-ad}{c^2}$, $\beta=-\dfrac{d}{c}$ et $\gamma=\dfrac{a}{c}$, on obtient :
$$\forall x\in\mathcal{D}_{a,b,c,d},\ f(x)=\frac{\alpha}{x-\beta}+\gamma.$$

□

29. En supposant connue la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x}$, où α est le réel déterminé en question précédente, comment retrouve-t-on la représentation graphique de la question *27b)* ?

Démonstration.

- Tout d'abord, on obtient la courbe représentative de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x-\beta}$ à partir de celle de la fonction $u : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x}$ en effectuant une translation de vecteur $(\beta, 0)$.
- Ensuite, on obtient la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x-\beta} + \gamma$ à partir de celle de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x-\beta}$ en effectuant une translation de vecteur $(0, \gamma)$.

Finalement, on obtient la courbe représentative de la fonction f à partir de celle de la fonction $u : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x}$ en effectuant une translation de vecteur $(\beta, \gamma) = \left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$. □

Dans toute la fin de l'exercice, on suppose : $ad - bc \neq 0$.

30. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$. Résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}$. *On exprimera x en fonction de y.*

Démonstration.
Soit $x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}$.

$$\begin{aligned}
y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{ax+b}{cx+d} \\
&\Leftrightarrow y(cx+d) = ax+b \\
&\Leftrightarrow cy\,x + dy = ax + b \\
&\Leftrightarrow (cy-a)\,x = -dy + b \\
&\Leftrightarrow y = \frac{-dy+b}{cy-a} \qquad \text{(car, comme } y \neq \frac{a}{c}\text{, alors : } cy - a \neq 0\text{)}
\end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation $y = f(x)$ sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ est : $\dfrac{-dy+b}{cy-a}$. □

31. En déduire que f est bijective sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ et déterminer sa bijection réciproque.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$. Autrement dit :

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\},\ \exists! x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d},\ y = f(x)$$

Ceci est la définition de « la fonction f réalise une bijection de $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$ ».

La fonction f réalise une bijection de $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$.

- On sait de plus, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

On en déduit, d'après la question précédente, $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\} & \to & \mathcal{D}_{a,b,c,d} \\ x & \mapsto & \dfrac{-dx+b}{cx-a} \end{array} \right.$

Commentaire

- Nous avons ainsi démontré que, dans le cas où $c \neq 0$, toute fonction homographique $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est bijective, de bijection réciproque :

$$f^{-1} : x \mapsto \frac{-dx+b}{cx-a}$$

- Nous avons donc en particulier démontré que la bijection réciproque d'une fonction homographique est une fonction homographique.

□

32. Peut-on répondre à la question ***30*** lorsque $y = \dfrac{a}{c}$?

Démonstration.
Supposons : $y = \dfrac{a}{c}$. Soit $x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{ax+b}{cx+d} \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{c}(cx+d) = ax+b \\ &\Leftrightarrow a(cx+d) = c(ax+b) \\ &\Leftrightarrow \cancel{acx} + ad = \cancel{acx} + bc \\ &\Leftrightarrow ad - bc = 0 \end{aligned}$$

Or, d'après l'énoncé, on se place depuis la question ***30*** dans le cas où : $ad - bc \neq 0$.

Dans le cas où $y = \dfrac{a}{c}$, l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solution sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$.

Commentaire

- On vient en fait de démontrer que le réel $\dfrac{a}{c}$ n'admet pas d'antécédent par f.
- Cela n'est pas surprenant au regard de la question ***27a*** où l'on constate que le réel $\dfrac{a}{c}$ n'est pas atteint par la fonction f (il s'agit seulement de la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$).

□