# DS2 /98

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 7. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

## Exercice 1 : Cours /16

*1.* Énoncer la formule du binôme de Newton.

- **1 pt**

*2.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\sum_{k=1}^{n} k^3$ ? Le démontrer.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

*3.* $(*)$ On considère la fonction $f$ définie par :

$$f : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$$

Démontrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- **2 pts (dont 1 pt pour : $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$)**

*4.* Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.
Démontrer que toute fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

- **3 pts : analyse**
  - × **1 pt : Soit $x \in I$, alors $-x \in I$**
  - × **1 pt : $f(-x) = g(x) - h(x)$**
  - × **1 pt : résolution du système par algorithme du pivot de Gauss**
- **2 pts : synthèse**
  - × **1 pt : $f = g_0 + h_0$**
  - × **1 pt : $g_0$ paire et $h_0$ impaire**

*5.* Soient $E$, $F$ et $G$ des ensembles. Soient $f$ une application de $E$ dans $F$, et $g$ une application de $F$ dans $G$.

*a)* $(*)$ Soient $B_1$ et $B_2$ deux parties de $F$. Démontrer :

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) \;=\; f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

- **1 pt : $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$**
- **1 pt : $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2)$**

*b)* $(*)$ Démontrer que, si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective.

- **2 pts**

*6.* Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner un encadrement optimal de $\lfloor x \rfloor$.

- **1 pt : $\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$**

## Exercice 2 : Fonctions hyperboliques et suite récurrente /47

On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse dans cet exercice à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

### Partie I : Étude des fonctions sh et $f$

***7.*** Dresser le tableau de variations de la fonction sh, puis en déduire le signe de $\operatorname{sh}(x)$ pour $x$ appartenant à $\mathbb{R}$.

- **1 pt : La fonction** sh **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **car elle est...**
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x) > 0$
- **1 pt : tableau de variations complet de** sh

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Signe de** $\operatorname{sh}'(x)$ | | $+$ | | $+$ | |
| **Variations de** sh | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |
| **Signe de** $\operatorname{sh}(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

- **1 pt : signe de** $\operatorname{sh}(x)$

***8.*** Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- **1 pt : hypothèses du théorème de la bijection**
- **1 pt :** $\operatorname{sh}(]-\infty, +\infty[) = ]-\infty, +\infty[$

***9.*** Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
On admettra dans la suite que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = 0$.

- **1 pt : La fonction** $f$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}_-^*$ **et** $\mathbb{R}_+^*$ **car elle est...**
- **1 pt :** $f' : x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}(x) - x\ \operatorname{ch}(x)}{\left(\operatorname{sh}(x)\right)^2}$

***10.*** On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = \mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)$$

Étudier les variations de $h$, puis en déduire le signe de $h(x)$.

- **1 pt : la fonction $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est...**
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h'(x) = -x\,\mathrm{sh}(x) \leqslant 0$ **(d'après 7)**
- **1 pt : variations et** $h(0) = 0$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| **Signe de $h'(x)$** | $0$ | $-$ |
| **Variations de $h$** | $0$ ↘ | $-\infty$ |
| **Signe de $h(x)$** | $0$ | $-$ |

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h(x) \leqslant 0$

***11.*** Déterminer les variations de $f$ sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) \leqslant 0$ **(d'après 9 et la question précédente)**
- **1 pt : mention de la dérivabilité de $f$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$ d'après l'énoncé**
- **1 pt :** $f(0) = 1$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- **2 pts : $f$ paire**
  - × **1 pt : cas $x \neq 0$ (0 pt si on ne précise pas que : $x \neq 0$, donc $-x \neq 0$)**
  - × **1 pt : cas $x = 0$**

## Partie II : Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On donne :

$$f\left(\tfrac{4}{5}\right) \leqslant 1, \qquad f(1) \geqslant \tfrac{4}{5}, \qquad \mathrm{sh}\left(\tfrac{4}{5}\right) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(1) \geqslant 1$$

***12.*** Démontrer : $f\left(\left[\tfrac{4}{5}, 1\right]\right) \subset \left[\tfrac{4}{5}, 1\right]$.

- **1 pt :** $f\left(\tfrac{4}{5}\right) \geqslant f(x) \geqslant f(1)$ **par décroissance de $f$ sur $\mathbb{R}_+$**
- **1 pt :** $\dfrac{4}{5} \leqslant f(1) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\tfrac{4}{5}\right) \leqslant 1$ **car...**

***13.*** $(*)$ En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$$

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

***14.*** (∗) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.
*(on pourra utiliser la question **8**, sans chercher à déterminer $\alpha$)*

- **1 pt : cas** $x = 0$
- **3 pts : cas** $x \neq 0$
  - × **1 pt :** $f(x) = x \Leftrightarrow 1 = \text{sh}(x)$
  - × **1 pt : d'après 8, la fonction** sh **réalise une bijection de** $\mathbb{R}$ **sur** $\mathbb{R}$**.**
  - × **1 pt :** $1 \in \mathbb{R}$

***15.*** Donner un encadrement de $\alpha$ et justifier :

$$\forall x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right], \quad \frac{h(1)}{\text{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\text{sh}^2(1)}$$

- **1 pt : d'après les données de l'énoncé :** $\text{sh}\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant 1 \leqslant \text{sh}(1)$**. Donc :** $\text{sh}\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant \text{sh}(\alpha) \leqslant \text{sh}(1)$
- **1 pt :** $\text{sh}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$**. D'où :** $\frac{4}{5} \leqslant \alpha \leqslant 1$
- **2 pts :** $\frac{h(1)}{\text{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\text{sh}^2(1)}$

***16.*** On donne : $\frac{h(1)}{\text{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \geqslant -\frac{1}{2}$ et $\frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\text{sh}^2(1)} \leqslant 0$.

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- **1 pt : IAF**
- **1 pt :** $(u_n, \alpha) \in [\frac{4}{5}, 1]^2$
- **3 pts : récurrence**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité**

***17.*** En déduire la limite de la suite $(u_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

- **1 pt :** $\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$**. Donc :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
- **1 pt : utilisation du théorème d'encadrement**

***18.*** (∗) Écrire une fonction en **Python** qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie la valeur de $u_{\texttt{n}}$.

- **1 pt : importation** `numpy`
- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : structure itérative**

```
1  import numpy as np
2  def suite_u(n) :
3      u = 1
4      for i in range(1,n+1) :
5          u = 2 * u / (np.exp(u) - np.exp(-u))
6      return u
```

***19. a)*** Déterminer un entier $n_0$ à partir duquel : $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}$.

- **1 pt : il suffit de trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-4}$**
- **2 pts :** $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-4} \Leftrightarrow n \geqslant \frac{3\ln(5)+4\ln(2)}{\ln(2)}$ **(dont 1 pt pour la stricte croissance de** ln **sur** $\mathbb{R}_+^*$**)**
- **1 pt : choix de** $n_0 = \left\lfloor \frac{3\ln(5)+4\ln(2)}{\ln(2)} \right\rfloor$

***b)*** Déduire de cette inégalité une fonction **Python** permettant de déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-4}$ près.

- **1 pt**

```
def alpha_approx() :
    n = np.ceil((3 * np.log(5) + 4 * np.log(2)) / np.log(2))
    return suite_u(n)
```

## Exercice 3 : Fonctions homographiques /35

On considère la fonction $g$ définie par :

$$g : x \mapsto \frac{2x-1}{-x+2}$$

***20.*** (∗) Démontrer que $g$ est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

- **1 pt : la fonction $g$ est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$ car elle est...**
- **1 pt :** $g' : x \mapsto \dfrac{3}{(-x+2)^2}$

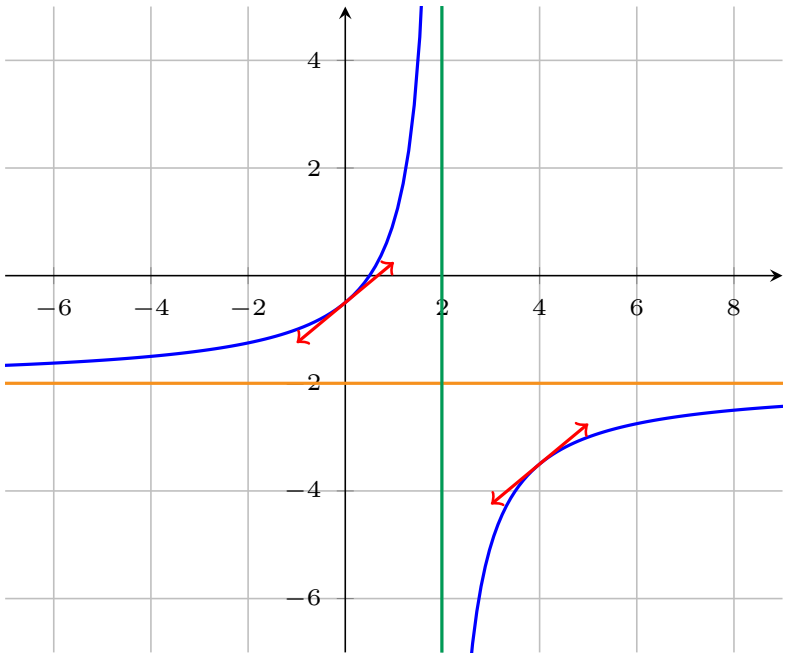
***21.*** (∗) Déterminer le tableau de variations complet de $g$ (limites comprises).

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -2$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -2$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = -\infty$
- **1 pt : reste du tableau de variations**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Signe de $g'(x)$** | $+$ | | $+$ | | |
| **Variations de $g$** | $-2$ | ↗ | $+\infty$ \| $-\infty$ | ↗ | $-2$ |

***22.*** (∗) Tracer la courbe représentative de $g$.

- **1 pt : tangentes**
- **1 pt : asymptotes**
- **1 pt : monotonie**
- **1 pt : propreté**



Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $c \neq 0$. On définit la fonction $f$ par :

$$f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

Une telle fonction est appelée *fonction homographique*. Notons que la fonction $g$ est un cas particulier de fonction homographique avec $a=2$, $b=-1$, $c=-1$ et $d=2$.

***23.*** Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ de $f$ en fonction de $c$ et $d$.

- **1 pt :** $\mathcal{D}_{a,b,c,d} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

***24.*** Déterminer les limites de $f$ aux bords de son ensemble de définition en fonction de $a$, $b$, $c$ et $d$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{a}{c}$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{a}{c}$
- **1 pt : si** $ad-bc>0$**, alors** $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x) = -\infty$**.**
- **1 pt : si** $ad-bc<0$**, alors :** $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x) = -\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x) = +\infty$**.**
- **1 pt : si** $ad-bc=0$**, alors :** $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x) = \dfrac{a}{c}$ **et** $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x) = \dfrac{a}{c}$**.**

***25.*** Démontrer que $f$ est dérivable sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ et montrer que sa dérivée est de la forme :

$$f' : x \mapsto \frac{ad-bc}{h(x)}$$

où $h$ est une fonction que l'on explicitera.

- **1 pt : la fonction** $f$ **est dérivable sur** $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ **car elle est...**
- **1 pt :** $f' : x \mapsto \dfrac{ad-bc}{h(x)}$ **où** $h : x \mapsto (cx+d)^2$

***26.*** Déterminer la monotonie de $f$. *On distinguera trois cas.*

- **1 pt : Si** $ad-bc>0$**, la fonction** $f$ **est donc strictement croissante sur** $]-\infty,-\frac{d}{c}[$ **et sur** $]-\frac{d}{c},+\infty[$.
- **1 pt : Si** $ad-bc=0$**, la fonction** $f$ **est donc constante sur** $]-\infty,-\frac{d}{c}[$ **et sur** $]-\frac{d}{c},+\infty[$.
- **1 pt : Si** $ad-bc<0$**, la fonction** $f$ **est donc strictement décroissante sur** $]-\infty,-\frac{d}{c}[$ **et sur** $]-\frac{d}{c},+\infty[$.

***27.*** On considère le cas particulier : $ad-bc>0$.

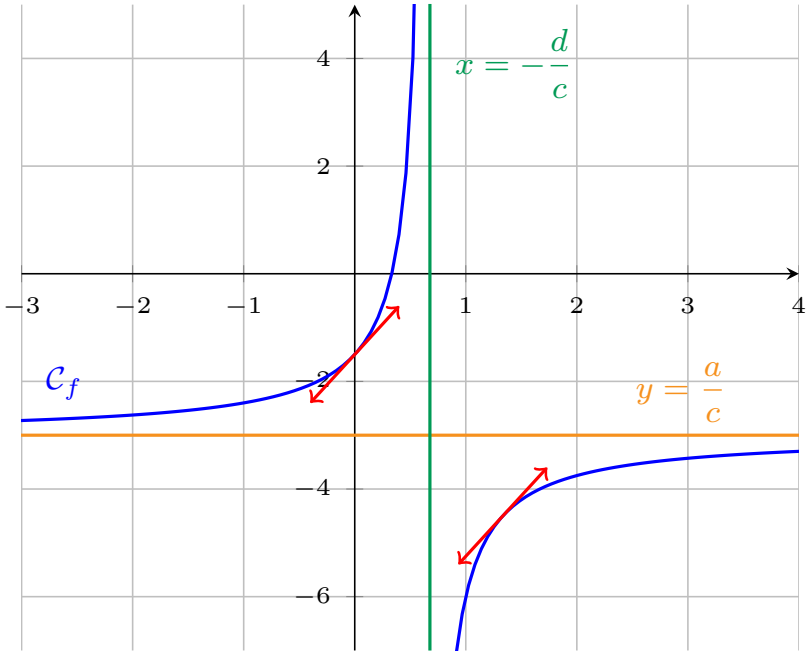
***a)*** Dresser le tableau de variations de $f$.

- **2 pts : utilisation des questions *5.* et *7.***

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{d}{c}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Signe de** $f'(x)$ | $+$ | | $\|\|$ | $+$ | |
| **Variations de** $f$ | $\frac{a}{c}$ | ↗ | $+\infty$ $\|\|$ $-\infty$ | ↗ | $\frac{a}{c}$ |

*b)* Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$.

- **1 pt : tangentes**
- **1 pt : asymptotes**
- **1 pt : monotonie**
- **1 pt : propreté**




***28.*** Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}, \quad f(x) = \frac{\alpha}{x-\beta} + \gamma$$

On exprimera $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ en fonction de $a$, $b$, $c$ et $d$.

- **1 pt :** $\alpha = \dfrac{bc-ad}{c^2}$
- **1 pt :** $\beta = -\dfrac{d}{c}$ **et** $\gamma = \dfrac{a}{c}$
- **1 pt : vérification**

***29.*** En supposant connue la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x}$, où $\alpha$ est le réel déterminé en question précédente, comment retrouve-t-on la représentation graphique de la question ***27b*** ?

- **1 pt : on obtient la courbe représentative de la fonction** $h : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x-\beta}$ **à partir de celle de la fonction** $u : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x}$ **en effectuant une translation de vecteur** $(\beta, 0)$.
- **1 pt : on obtient la courbe représentative de la fonction** $f : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x-\beta} + \gamma$ **à partir de celle de la fonction** $h : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x-\beta}$ **en effectuant une translation de vecteur** $(0, \gamma)$.

Dans toute la fin de l'exercice, on suppose : $ad - bc \neq 0$.

***30.*** Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$. Résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}$. *On exprimera $x$ en fonction de $y$.*

- **2 pts : L'unique solution de l'équation $y = f(x)$ sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ est : $\dfrac{-dy+b}{cy-a}$ (dont 1 pt : comme $y \neq \dfrac{a}{c}$, alors : $cy - a \neq 0$)**

***31.*** En déduire que $f$ est bijective sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ et déterminer sa bijection réciproque.

- **1 pt : D'après la question précédente :** $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\},\ \exists! x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d},\ y = f(x)$
- **1 pt :** $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\} & \to & \mathcal{D}_{a,b,c,d} \\ x & \mapsto & \dfrac{-dx+b}{cx-a} \end{array} \right.$

***32.*** Peut-on répondre à la question *30* lorsque $y = \dfrac{a}{c}$ ?

- **1 pt : Dans le cas où $y = \dfrac{a}{c}$, l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solution sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$**