DS2



On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 9. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Énoncer la formule du binôme de Newton.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\sum_{k=1}^{n} k^3$? Le démontrer.

3. $(*)$ On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$$

Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.
Démontrer que toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

5. Soient E, F et G des ensembles. Soient f une application de E dans F, et g une application de F dans G.

a) $(*)$ Soient B_1 et B_2 deux parties de F. Démontrer :

$$f^{-1\!\!1}(B_1 \cap B_2) \;=\; f^{-1\!\!1}(B_1) \cap f^{-1\!\!1}(B_2)$$

b) $(*)$ Démontrer que, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner un encadrement optimal de $\lfloor x \rfloor$.

Exercice 2 : Fonctions hyperboliques et suite récurrente

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{sh}\,(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse dans cet exercice à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f\,(u_n) \end{cases}$$

Partie I : Étude des fonctions sh et f

7. Dresser le tableau de variations de la fonction sh, puis en déduire le signe de $\mathrm{sh}\,(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

8. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

9. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et calculer $f'\,(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
On admettra dans la suite que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(0) = 0$.

10. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = \mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)$.
Étudier les variations de h, puis en déduire le signe de $h(x)$.

11. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$.

Partie II : Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant, appelé *Inégalité des Accroissements Finis*.

> Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(a,b) \in I^2$. Supposons : $a < b$.
> Soit $M \in \mathbb{R}_+$.
> Soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
> Supposons que la fonction f :
> × est continue sur $[a,b]$,
> × est dérivable sur $]a,b[$,
> × vérifie : $\forall x \in [a,b],\ \left|f'(x)\right| \leqslant M$.
> Alors :
> $$\forall (x,y) \in [a,b]^2,\quad \left|f(y) - f(x)\right| \ \leqslant\ M\,|y-x|$$

On donne :
$$f\left(\tfrac{4}{5}\right) \leqslant 1, \qquad f(1) \geqslant \tfrac{4}{5}, \qquad \mathrm{sh}\left(\tfrac{4}{5}\right) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(1) \geqslant 1$$

12. Démontrer : $f\left(\left[\tfrac{4}{5},1\right]\right) \subset \left[\tfrac{4}{5},1\right]$.

13. (∗) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\tfrac{4}{5},1\right]$.

14. (∗) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
(on pourra utiliser la question 8, sans chercher à déterminer α)

15. Donner un encadrement de α et justifier :
$$\forall x \in \left[\frac{4}{5},1\right],\ \frac{h(1)}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\mathrm{sh}^2(1)}$$

16. On donne : $\dfrac{h(1)}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\mathrm{sh}^2(1)} \leqslant 0$.
Démontrer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$$
Puis :
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

17. En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

18. (∗) Écrire une fonction en **Python** qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie la valeur de $u_{\texttt{n}}$.

19. ***a)*** Déterminer un entier n_0 à partir duquel : $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}$.

b) Déduire de cette inégalité une fonction **Python** permettant de déterminer une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Exercice 3 : Fonctions homographiques

On considère la fonction g définie par :

$$g : x \mapsto \frac{2x-1}{-x+2}$$

20. (∗) Démontrer que g est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

21. (∗) Déterminer le tableau de variations complet de g (limites comprises).

22. (∗) Tracer la courbe représentative de g.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $c \neq 0$. On définit la fonction f par :

$$f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

Une telle fonction est appelée *fonction homographique*. Notons que la fonction g est un cas particulier de fonction homographique avec $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$ et $d = 2$.

23. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ de f en fonction de c et d.

24. Déterminer les limites de f aux bords de son ensemble de définition en fonction de a, b, c et d.

25. Démontrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ et montrer que sa dérivée est de la forme :

$$f' : x \mapsto \frac{ad-bc}{h(x)}$$

où h est une fonction que l'on explicitera.

26. Déterminer la monotonie de f. *On distinguera trois cas.*

27. On considère le cas particulier : $ad - bc > 0$.

a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

28. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}, \quad f(x) = \frac{\alpha}{x-\beta} + \gamma$$

On exprimera α, β et γ en fonction de a, b, c et d.

29. En supposant connue la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \frac{\alpha}{x}$, où α est le réel déterminé en question précédente, comment retrouve-t-on la représentation graphique de la question ***27b*** ?

Dans toute la fin de l'exercice, on suppose : $ad - bc \neq 0$.

30. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$. Résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}$. *On exprimera x en fonction de y.*

31. En déduire que f est bijective sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ et déterminer sa bijection réciproque.

32. Peut-on répondre à la question ***30*** lorsque $y = \frac{a}{c}$?