

DS9

Exercice 1 : Les urnes de Pólya (CCINP 2021 PC)

- On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher.
- On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :
 - si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
 - si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.
- Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage dans un cas particulier.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche, 0 si la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = b + \sum_{k=1}^n X_k$$

- On rappelle que si E et F sont deux événements avec $\mathbb{P}(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $\mathbb{P}(E | F)$ ou $\mathbb{P}_F(E)$) par :

$$\mathbb{P}(E | F) = \mathbb{P}_F(E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$$

Partie I - Préliminaires

- Déterminer la loi de X_1 .
- Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $\{X_1 = 1\}$. En déduire la loi de X_2 .
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II - La loi de X_n

- Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
- Pour tout $k \in \llbracket b, n + b \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\} | \{S_n = k\})$.
- À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier :

$$\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{b + r + n}$$

- Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

- Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Exprimer l'événement $\{S_n = 1\}$ avec les événements $\{X_k = 0\}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

8. Montrer que $\mathbb{P}(\{S_n = 1\}) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $\mathbb{P}(\{S_n = n+1\}) = \frac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket \times \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\} \mid \{S_n = \ell\})$ dans chacun des trois cas suivants :

(i) $\ell \notin \{k-1, k\}$,

(ii) $\ell = k-1$,

(iii) $\ell = k$.

10. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, on a la relation :

$$\mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\}) = \frac{k-1}{n+2} \mathbb{P}(\{S_n = k-1\}) + \frac{n+2-k}{n+2} \mathbb{P}(\{S_n = k\})$$

11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

Exercice 2 (inspiré Oral ESCP 2018)

Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}$.

On suppose : $u_0 > 0$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.

12. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n > 0$.

► **Initialisation :**

D'après l'énoncé : $u_0 > 0$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $u_{n+1} > 0$).

Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$.

- Comme $u_n > 0$, alors $u_n^2 > 0$ (car la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$).

- Comme de plus $n+1 > 0$ alors $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1} > 0$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on en conclut : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Comme $u_n > 0$, alors la quantité $\ln(u_n)$ est bien définie.

- De plus, $2^n \neq 0$.

On en déduit que la quantité $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$ est bien définie.

Ainsi, la suite (v_n) est bien définie.

Commentaire

- La question de bonne définition d'une suite est un classique de l'étude des suites récurrentes. Elle se traite généralement par récurrence. Plus généralement, on démontre :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(n) : \text{la quantité } v_n \text{ est bien définie}$$

Cela permet de conclure que **TOUS** les termes de la suite (v_n) sont bien définis c'est-à-dire que la suite (v_n) est elle-même bien définie.

- Dans la rédaction la question, on a écrit :

$$\mathcal{P}(n) : u_n > 0 \quad \text{en lieu et place de} \quad \mathcal{P}(n) : \text{la quantité } v_n \text{ est bien définie}$$

Cela a du sens car :

- × la suite (u_n) est bien définie (sa définition ne fait pas apparaître de problème d'existence).
On peut donc étudier le signe de n'importe quel terme u_n de cette suite.
- × la quantité v_n est bien définie si et seulement si $u_n > 0$.

□

13. a) Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

Démonstration. On a :

$$\times \forall n \geq 1, \frac{\ln(n)}{2^n} \geq 0 \text{ et } \frac{1}{n^2} \geq 0.$$

$$\times \frac{\ln(n)}{2^n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right). \text{ En effet :}$$

$$\frac{\frac{\ln(n)}{2^n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\ln(n)}{2^n} n^2 = \frac{\ln(n)}{(\sqrt{2})^n} \frac{n^2}{(\sqrt{2})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{car } \frac{\ln(n)}{(\sqrt{2})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \frac{n^2}{(\sqrt{2})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ par croissances comparées.}$$

$\times$ La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

Par critère de négligeabilité des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{2^n}$ converge. □

Commentaire

- Le théorème des croissances comparées stipule que pour tout $b > 0$ et $q > 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(n))^b}{q^n} = 0$$

On dit alors que la croissance logarithmique est plus faible que la croissance exponentielle. Dans cette question, il s'agit de démontrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \ln(n)}{2^n} = 0$$

Le numérateur n'est ni polynomial, ni logarithmique. En toute rigueur, il faut donc un argument supplémentaire avant de pouvoir utiliser le théorème des croissances comparées.

- Il faut avoir en tête : $n^2 \ln(n) = o_{n \rightarrow +\infty} (n^3)$. La croissance au numérateur est donc « au mieux polynomiale ». Il est donc logique que la croissance exponentielle au dénominateur l'emporte.
- Rappelons au passage la condition **NÉCESSAIRE** de convergence des séries :

$$\sum w_n \text{ converge} \Rightarrow w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Cette condition n'est pas suffisante : $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \not\Rightarrow \sum w_n \text{ converge}$.

(on peut illustrer ce point par la suite (w_n) définie par : $\forall n \geq 1, w_n = \frac{1}{n}$)

S'il est nécessaire que le terme général de la série tende vers 0, il faut de plus s'assurer que cette convergence se fait suffisamment rapidement. C'est ce que l'on fait dans le cas des séries à termes positifs : on s'assure que le terme général w_n tend vers 0 au moins aussi vite que le terme général d'une série convergente (on utilise les théorèmes de comparaisons).

C'est l'argument ici : $\frac{\ln(n)}{2^n}$ tend plus rapidement vers 0 que $\frac{1}{n^2}$ qui est un exemple classique de terme général de série convergente.

b) (i) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_k - v_{k-1}$ en fonction de k .

Puis déterminer la nature de la série $\sum_{k \geq 1} (v_k - v_{k-1})$.

Démonstration.

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 v_k - v_{k-1} &= \frac{\ln(u_k)}{2^k} - \frac{\ln(u_{k-1})}{2^{k-1}} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{u_{k-1}^2}{(k-1)+1}\right)}{2^k} - \frac{\ln(u_{k-1})}{2^{k-1}} && (\text{par définition de la suite } (u_n)) \\
 &= \frac{\ln(u_{k-1}^2) - \ln(k)}{2^k} - \frac{2 \ln(u_{k-1})}{2^k} \\
 &= \frac{\cancel{2 \ln(u_{k-1})} - \ln(k) - \cancel{2 \ln(u_{k-1})}}{2^k} && (\text{car } u_{k-1} > 0) \\
 &= -\frac{\ln(k)}{2^k}
 \end{aligned}$$

$$\forall k \geq 1, v_k - v_{k-1} = -\frac{\ln(k)}{2^k}$$

• On a vu dans la question précédente que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ est convergente.

On ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par -1 ($\neq 0$).

On en déduit que la série $\sum_{k \geq 1} (v_k - v_{k-1})$ est convergente.

□

(ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ .

Démonstration.

Soit $n \geq 1$. Par télescopage :

$$\sum_{k=1}^n (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_{1-1} = v_n - v_0$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 v_n &= \sum_{k=1}^n (v_k - v_{k-1}) + v_0 \\
 &= -\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 && (\text{d'après la question précédente})
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \sum_{k=1}^n & & \sum_{k=1}^n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \frac{+}{\circ} & & \frac{+}{\circ}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} && v_0 && (\text{car on a montré en question 2.a que la série } \sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k} \text{ est convergente})
 \end{aligned}$$

La suite (v_n) est convergente, de limite $\ell = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sigma + v_0$.

□

14. On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ .

On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.

Démonstration.

D'après la question précédente :

$$\ell = \sigma + v_0 = \sigma + \ln(u_0)$$

• On en déduit :

$$\begin{aligned} \ell > 0 &\Leftrightarrow \sigma + \ln(u_0) > 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(u_0) > -\sigma \\ &\Leftrightarrow u_0 > e^{-\sigma} \quad \text{(par stricte croissance de la fonction exp sur } \mathbb{R} \text{)} \end{aligned}$$

Ainsi, si : $u_0 > e^{-\sigma}$ alors : $\ell > 0$.

• De même :

$$\ell < 0 \Leftrightarrow u_0 < e^{-\sigma}$$

Ainsi, si : $u_0 < e^{-\sigma}$ alors : $\ell < 0$.

□

b) En déduire la limite de $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition :

$$\ln(u_n) = 2^n v_n$$

Deux cas se présentent :

× si $u_0 > e^{-\sigma}$: alors la suite (v_n) est convergente de limite $\ell > 0$.

De plus : $2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On en déduit, par produit de limites, que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Enfin : $u_n = \exp(\ln(u_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

× si $u_0 < e^{-\sigma}$: alors la suite (v_n) est convergente de limite $\ell < 0$.

De plus : $2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On en déduit, par produit de limites, que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Enfin : $u_n = \exp(\ln(u_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

□

15. On suppose dans cette question : $u_0 = e^{-\sigma}$.

a) (i) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

Démonstration.

- Comme on a supposé $u_0 = e^{-\sigma}$, on a :

$$v_0 = \ln(u_0) = -\sigma = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

- Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après la question **2.b)(ii)** :

$$\begin{aligned} v_n &= -\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 \\ &= -\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \end{aligned}$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

□

(ii) Retrouver dans ce cas la valeur de la limite ℓ de la suite (v_n) .

Démonstration.

- En question **2.a)**, on a démontré que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{2^n}$ est convergente.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} = 0 \end{aligned}$$

- Rappelons qu'on a démontré en question **2.b)(ii)** :

$$\ell = \sigma + v_0 = \sigma + \ln(u_0) = \sigma + \ln(e^{-\sigma}) = 0$$

On retrouve le résultat de la question **2.b)(ii)** : la suite (v_n) est convergente de limite nulle.

□

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
 \ln(u_n) &= 2^n v_n \\
 &= 2^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \\
 &= 2^n \left(\frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \\
 &= \frac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \\
 &\geq \frac{\ln(n+1)}{2} \quad \left(\text{car } \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \geq 0 \text{ en tant} \right. \\
 &\quad \left. \text{que somme de réels positifs} \right)
 \end{aligned}$$

- On en déduit, par croissance de la fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$:

$$u_n \geq \exp\left(\frac{\ln(n+1)}{2}\right)$$

Or : $\frac{\ln(n+1)}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, par composition : $\exp\left(\frac{\ln(n+1)}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

□

Partie II : Approximation de σ

16. a) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$.

Démonstration.

La fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$.

Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se situe donc sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse

1. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned}
 y &= g(1) + g'(1)(x - 1) \\
 &= \ln(1) + \frac{1}{1}(x - 1) = x - 1
 \end{aligned}$$

On en déduit : $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$.

Commentaire

- Le membre droit de l'inégalité souhaitée est un polynôme de degré 1. Sa représentation graphique est une droite. C'est ce constat qui doit faire penser à une inégalité de convexité.
- Si on ne pense pas à utiliser une propriété de convexité, on peut aussi résoudre cette question en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto \ln(x) - (x - 1)$.

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+1}{2^n}$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \ln(k) &\leq k-1 \\ \text{donc } \frac{\ln(k)}{2^k} &\leq \frac{k-1}{2^k} \quad (\text{car } 2^k > 0) \end{aligned}$$

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \geq n+1$. En sommant les inégalités précédentes pour k variant de $n+1$ à m , on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^m \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{k-1}{2^k} \quad (*)$$

- Considérons la partie de droite :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=n+1}^m (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=1}^{m-n} (k+n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k+n} \quad (\text{par décalage d'indice}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{m-n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (\text{par linéarité de la somme}) \end{aligned}$$

Or :

× la série $\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ est une série géométrique dérivée première de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$.

C'est donc une série convergente. De plus, on a :

$$\sum_{k=1}^{m-n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

× la série $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$.

C'est donc une série convergente. De plus, on a :

$$\sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{(\frac{1}{2})^1 - (\frac{1}{2})^{m-n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Ainsi : $\sum_{k=n+1}^m (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 4 + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n 2 + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+1}{2^n}$

- On en déduit que le membre droit de l'inégalité (*) admet une limite finie.
Par passage à la limite lorsque m tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+1}{2^n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+1}{2^n}$$

□

17. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \sigma - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) &= \sigma + \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} && \text{(par définition de } \sigma \text{)} \\ &= -\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \\ &= -\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \end{aligned}$$

- On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| &= \left| -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \right| \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} && \text{(car } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} > 0 \text{ en tant que} \\ &&& \text{somme d'une série à termes positifs)} \\ &\leq \frac{n+1}{2^n} && \text{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{n+1}{2^n}}$$

□

18. Écrire une fonction **Python** (que l'on nommera **approx**) qui, prenant en argument un réel ε strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à ε près.

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier N tel que $-\sum_{k=1}^N \frac{\ln(k)}{2^k}$ est une valeur approchée de σ à ε près. Autrement dit, on souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^N \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \varepsilon$$

- Or, d'après la question **6.**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$$

- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{N+1}{2^N} \leq \varepsilon$.

En effet, par transitivité, on aura alors :

$$\left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^N \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{N+1}{2^N} \leq \varepsilon$$

- On propose alors la fonction suivante :

```
1 import numpy as np
2 def approx(eps) :
3     k = 0
4     S = 0
5     while (k+1) / 2**k > eps :
6         k = k + 1
7         S = S + np.log(k) / 2**k
8     sigma = -S
9     return sigma
```

□

Exercice 3 (Centrale I PSI 2018)

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2.

Le but du problème est d'étudier la réduction de certaines *matrices de Toeplitz*, c'est-à-dire de matrices d'ordre n de la forme suivante, où $(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$:

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

dans laquelle les coefficients diagonaux sont tous égaux à t_0 , ceux de la première sur-diagonale tous égaux à t_1 , ceux de la première sous-diagonale tous égaux à t_{-1} , etc.

On nomme $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$:

$$\text{Toep}_n(\mathbb{C}) = \{T(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \mid (t_k)_{-n+1 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{C}^{2n-1}\}$$

Partie 0 - Généralités

19. Montrer que $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En donner une base et en préciser la dimension.

Démonstration.

- Dans la suite, notons :
 - × $(e_{-n+1}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^{2n-1}$.
 - × pour tout $k \in \llbracket -(n-1), n-1 \rrbracket$, $T_k = T(e_k)$.
- Avec les notations précédentes :
 - × $T(e_0) = I_n$.
 - × pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $T(e_k)$ est la matrice qui contient des 1 sur la $k^{\text{ème}}$ sur-diagonale et des 0 partout ailleurs.
 - × pour tout $k \in \llbracket -(n-1), -1 \rrbracket$, $T(e_k)$ est la matrice qui contient des 1 sur la $k^{\text{ème}}$ sous-diagonale et des 0 partout ailleurs.

Pour tout $(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$, on obtient alors :

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} t_k \cdot T(e_k)$$

- Avec ces notations :

$$\begin{aligned} \text{Toep}_n(\mathbb{C}) &= \left\{ \sum_{k=-(n-1)}^{(n-1)} t_k \cdot T(e_k) \mid (t_k)_{-n+1 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{C}^{2n-1} \right\} \\ &= \text{Vect} (T(e_{-(n-1)}), \dots, T(e_0), \dots, T(e_{n-1})) \\ &= \text{Vect} (T(1, 0, \dots, 0), T(0, 1, 0, \dots, 0), \dots, T(0, \dots, 1, 0), T(0, \dots, 0, 1)) \end{aligned}$$

En particulier, $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel.

- La famille $\mathcal{F} = \left(T(1, 0, \dots, 0), T(0, 1, 0, \dots, 0), \dots, T(0, \dots, 1, 0), T(0, \dots, 0, 1) \right)$ est :

× libre. Démontrons-le.

Soit $(\lambda_{-(n-1)}, \dots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{(n-1)}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$. Supposons :

$$\lambda_{-(n-1)} \cdot T(1, 0, \dots, 0) + \dots + \lambda_0 \cdot T(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + \lambda_{n-1} \cdot T(0, \dots, 0, 1) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \quad (*)$$

$$\text{Or :} \quad (*) \Leftrightarrow T(\lambda_{-n+1}, \dots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & \lambda_{n-1} \\ \lambda_{-1} & \lambda_0 & \lambda_1 & \ddots & & \vdots \\ \lambda_{-2} & \lambda_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{-1} & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_{-n+1} & \cdots & \cdots & \lambda_{-2} & \lambda_{-1} & \lambda_0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

$$\Leftrightarrow \{\lambda_{-n+1} = \dots = \lambda_{-1} = \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0\}$$

× génératrice de $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$ d'après le point précédent.

On en déduit que $\mathcal{F}$ est une base de $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$.

De plus : $\dim(\text{Toep}_n(\mathbb{C})) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 2n - 1$.

□

20. Un exemple. Soit N la matrice de Toeplitz dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la première sous-diagonale qui valent 1 :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le polynôme caractéristique de N et calculer $\text{Ker}(N)$.

La matrice N peut-elle être semblable à une matrice diagonale ?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\chi_N(X) = \det(X \cdot I_n - N)$$

$$= \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & X & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}$$

$$= X^n \quad (\text{car la matrice qui précède est triangulaire})$$

Ainsi : $\chi_N(X) = X^n$.

- Déterminons $\text{Ker}(N)$.

× Par théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})) & = & \dim(\text{Ker}(N)) & + & \text{rg}(N) \\ \parallel & & & & \parallel \\ n & & & & n-1 \end{array}$$

On en déduit : $\dim(\text{Ker}(N)) = 1$.

× On remarque de plus : $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(N)$. En effet :

$$N \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$$

× La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) :$

- est libre, car elle est constituée uniquement d'un vecteur, qui est non nul.
- vérifie : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 1 = \dim(\text{Ker}(N))$.

C'est donc une base de $\text{Ker}(N)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Ker}(N)$.

- Démontrons que la matrice N n'est pas semblable à une matrice diagonale. On procède par l'absurde.

Supposons que la matrice N est semblable. Il existe donc :

- × $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.
- × $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines de χ_N (présentes avec multiplicité). En effet, par invariance du polynôme caractéristique par similitude :

$$\chi_D = \chi_N$$

telles que :

$$\begin{aligned} N &= P \times D \times P^{-1} \\ &= P \times 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \times P^{-1} && \text{(car 0 est la seule racine de } \chi_N \text{)} \\ &= 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

C'est impossible car $N \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

On en conclut que la matrice N n'est pas diagonalisable.

Commentaire

- Cette question illustre une formulation fréquente dans les énoncés de concours, à savoir :

« La propriété [...] est-elle vérifiée ? »

On retrouve par exemple régulièrement les questions suivantes :

- × « La matrice est-elle diagonalisable ? »
- × « La suite (croissante) (u_n) est-elle convergente ? »
- × « La série de fonctions converge-t-elle uniformément ? »
- × ...

La réponse attendue est généralement : **NON**. Évidemment, pour obtenir des points, il convient de **démontrer** pourquoi la propriété étudiée n'est pas vérifiée. Pour ce faire, on procède généralement par l'absurde. On suppose alors que la propriété est vérifiée ce qui permet d'avoir une hypothèse supplémentaire utilisable et à terme d'aboutir à une contradiction.

- Précisons la méthode spécifique à cette question. Une matrice M à la fois diagonalisable et ne possédant qu'une seule valeur propre λ est semblable à la matrice diagonale ne contenant que λ comme coefficient diagonal. Autrement dit, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$M = P \times D \times P^{-1} = P (\lambda I_n) P^{-1} = \lambda (P I_n P^{-1}) = \lambda (P P^{-1}) = \lambda I_n$$

Ainsi, les matrices diagonalisables ne possédant qu'une seule valeur propre sont des matrices scalaires (elles sont égales à λI_n pour un certain λ).

- Comme annoncé dans le premier point, cette démonstration est souvent utilisée pour démontrer qu'une matrice n'est **PAS** diagonalisable.

- b) Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice commutant avec N (c'est-à-dire telle que $MN = NM$).

Montrer que $M = \sum_{i=1}^n m_{i,1} N^{i-1}$.

On pourra commencer par considérer la colonne ME_1 , puis les colonnes ME_k pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, où $(E_1, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix} \quad (\text{en multipliant } M \text{ à droite par } E_1, \text{ on obtient la } 1^{\text{ère}} \text{ colonne de } M)$$

De manière générale, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le produit $M \times E_k$ permet d'obtenir la $k^{\text{ème}}$ colonne de M .

- D'autre part :

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix} = m_{1,1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + m_{n,1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n m_{i,1} \cdot E_i \quad (*)$$

- Remarquons par ailleurs que la matrice N est la concaténation des matrices $E_2, E_3, \dots, E_n$ et la colonne nulle.

$$N = (E_2 \ E_3 \ \dots \ E_n \ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})})$$

On en déduit alors pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ (rigoureusement, il faudrait faire une récurrence) :

$$\begin{aligned} N^j \times E_1 &= N^{j-1} \times (NE_1) \\ &= N^{j-1} \times E_2 && \text{(la multiplication à droite par } E_1 \text{ a pour résultat la 1}^{\text{ère}} \text{ colonne de } N \text{ qui n'est autre que } E_2) \\ &= N^{j-2} \times (NE_2) \\ &= N^{j-2} \times E_3 && \text{(la multiplication à droite par } E_2 \text{ a pour résultat la 2}^{\text{ème}} \text{ colonne de } N \text{ qui n'est autre que } E_3) \\ &= \dots \\ &= N^0 \times E_{j+1} \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, N^j \times E_1 = I_n \times E_{j+1} = E_{j+1}$ ou encore : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, N^{i-1} \times E_1 = E_i$.

- Finalement :

$$\begin{aligned} M \times E_1 &= \sum_{i=1}^n m_{i,1} \cdot E_i && \text{(d'après (*))} \\ &= \sum_{i=1}^n m_{i,1} \cdot (N^{i-1} \times E_1) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n m_{i,1} \cdot N^{i-1} \right) \times E_1 \end{aligned}$$

Ainsi, les matrices M et $R = \sum_{i=1}^n m_{i,1} \cdot N^{i-1}$ ont même première colonne.

- Pour démontrer que M et R coïncident, il suffit alors de démontrer que les autres colonnes de M et R coïncident. Pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} M \times E_k &= M \times (N^{k-1} \times E_1) \\ &= N^{k-1} \times (M \times E_1) && \text{(car } M \text{ commute avec } N \text{ et donc avec toute puissance de } N) \\ &= N^{k-1} \times (R \times E_1) && \text{(d'après le résultat précédent)} \\ &= R \times (N^{k-1} \times E_1) && \text{(car } R \text{ est une combinaison linéaire de puissances de la matrice } N \text{ et commute donc avec } N^{k-1}) \\ &= R \times E_k \end{aligned}$$

Finalement, toutes les colonnes de M et $R = \sum_{i=1}^n m_{i,1} \cdot N^{i-1}$ coïncident.
Ces deux matrices sont donc égales.

□

- c) Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec N est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.

Démonstration.

- Il s'agit de démontrer :

$$\begin{aligned} & \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MN = NM \} \\ &= \{ T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exists (t_{-(n-1)}, \dots, t_{-1}, t_0) \in \mathbb{C}^n, T = (t_{-(n-1)}, \dots, t_{-1}, t_0, 0, \dots, 0) \} \end{aligned}$$

- On procède par double inclusion.

(C) On a vu dans la question précédente que si M et N commutent alors $M = \sum_{i=1}^n m_{i,1} \cdot N^{i-1}$.

Il suffit alors de remarquer :

- × $N^0 = I_n = T(e_0)$.
- × $N^1 = T(e_{-1})$, matrice qui contient des 1 dans la première sous-diagonale et des 0 ailleurs.
- × $N^2 = T(e_{-2})$, matrice qui contient des 1 dans la deuxième sous-diagonale et des 0 ailleurs.
- × ...
- × $N^{n-1} = T(e_{-(n-1)})$, matrice qui contient 1 dans la $(n-1)^{\text{ème}}$ sous-diagonale et des 0 ailleurs (c'est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient en bas à gauche est 1 et dont les autres coefficients sont 0).

Finalement :

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^n m_{i,1} \cdot N^{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} m_{i+1,1} \cdot N^i && (\text{par décalage d'indice}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} m_{i+1,1} \cdot T(e_{-i}) \\ &= T\left(\sum_{i=0}^{n-1} m_{i+1,1} \cdot e_{-i}\right) \\ &= T(m_{n,1}, m_{n-1,1}, \dots, m_{1,1}, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

D'où la première inclusion.

(D) Il suffit de remarquer que pour tout $(t_{-(n-1)}, \dots, t_{-1}, t_0) \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} T(t_{-(n-1)}, \dots, t_{-1}, t_0, 0, \dots, 0) &= T\left(\sum_{i=0}^{n-1} t_{-i} \cdot e_{-i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} t_{-i} \cdot T(e_{-i}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} t_{-i} \cdot N^i \end{aligned}$$

Comme cette matrice est une combinaison linéaire de puissances de N , elle commute avec N . D'où l'inclusion réciproque.

□

Partie 1 - Cas de la dimension 2

21. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz d'ordre 2, où (a, b, c) sont des complexes.

a) Donner le polynôme caractéristique de A .

Démonstration.

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(X I_2 - A) \\ &= \begin{vmatrix} X - a & -b \\ -c & X - a \end{vmatrix} \\ &= (X - a)(X - a) - (-b)(-c) \\ &= X^2 - 2aX + (a^2 - bc) \end{aligned}$$

$$\chi_A(X) = X^2 - 2aX + (a^2 - bc)$$

Commentaire

Comme A est une matrice carrée d'ordre 2, on pouvait aussi utiliser la formule :

$$\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$$

□

- b) Si $\Delta = bc = 0$, démontrer que la matrice A n'est pas semblable à une matrice diagonale.
c) Si $\Delta = bc \neq 0$, démontrer que A est semblable à une matrice diagonale.

22. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

- a) Déterminer le polynôme caractéristique de M .
b) Montrer que M est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des complexes avec $\alpha \neq \beta$.
c) En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

Partie 2 - Un cas particulier : les matrices tridiagonales

Une matrice tridiagonale est une matrice de Toeplitz de type $T(0, \dots, 0, t_{-1}, t_0, t_1, 0, \dots, 0)$, c'est-à-dire une matrice de la forme :

$$A_n(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix}$$

où (a, b, c) sont des complexes.

On fixe (a, b, c) trois nombres complexes tels que $bc \neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a, b, c)$.

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Supposons : $\begin{cases} X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \\ A_n(a, b, c)X = \lambda \cdot X \end{cases}$

23. Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors $(x_1, \dots, x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad bx_{k+2} + (a - \lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

24. Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation :

$$bx^2 + (a - \lambda)x + c = 0 \quad (1)$$

25. À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1} , montrer que (1) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 .

26. Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que $\frac{r_1}{r_2}$ appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$, ensemble des racines $(n+1)$ -èmes de l'unité.

27. En utilisant l'équation (1) satisfaite par r_1 et r_2 , déterminer $r_1 r_2$ et $r_1 + r_2$.

En déduire qu'il existe un entier $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que :

$$\lambda = a + 2\rho \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) \quad (2)$$

28. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout k dans $\llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $x_k = 2i \alpha \frac{\rho^k}{b^k} \sin\left(\frac{\ell k \pi}{n+1}\right)$.

29. Conclure que $A_n(a, b, c)$ est semblable à une matrice diagonale.