

DS9 /113

Exercice 1 : Les urnes de Pólya /33

- On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher.
- On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :
 - si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
 - si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.
- Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage dans un cas particulier.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche, 0 si la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = b + \sum_{k=1}^n X_k$$

- On rappelle que si E et F sont deux événements avec $\mathbb{P}(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $\mathbb{P}(E | F)$ ou $\mathbb{P}_F(E)$) par :

$$\mathbb{P}(E | F) = \mathbb{P}_F(E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$$

Partie I - Préliminaires

- Déterminer la loi de X_1 .

- 1 pt : comme** $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ **alors** $X_1 \sim \mathcal{B}(r)$

- 1 pt : où** $r = \mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{b+r}$

- Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $\{X_1 = 1\}$. En déduire la loi de X_2 .

- 0 pt : $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$**

- 1 pt : si l'événement $\{X_1 = 1\}$ est réalisé, c'est qu'on a tiré une boule blanche au 1^{er} tirage. On remet donc cette boule dans l'urne et on y ajoute une boule blanche. L'événement $\{X_2 = 1\}$ est alors réalisé si et seulement si on pioche une des $b+1$ boules blanches dans une urne qui en contient $r+b+1$.**

- 1 pt : Dans ce cas, l'événement $\{X_2 = 1\}$ est réalisé ssi ...et ainsi :**

$$\mathbb{P}_{\{X_1=1\}}(\{X_2 = 1\}) = \frac{b+1}{r+b+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{\{X_1=1\}}(\{X_2 = 0\}) = \frac{r}{r+b+1}$$

- 1 pt : de même** $\mathbb{P}_{\{X_1=0\}}(\{X_2 = 1\}) = \frac{b}{r+b+1}$ **et** $\mathbb{P}_{\{X_1=0\}}(\{X_2 = 0\}) = \frac{r+1}{r+b+1}$

- 1 pt : par la FPT,** $\mathbb{P}(\{X_2 = 1\}) = \mathbb{P}(\{X_2 = 1\} \cap \{X_1 = 0\}) + \mathbb{P}(\{X_2 = 1\} \cap \{X_1 = 1\})$

- 1 pt : $\dots = \mathbb{P}(\{X_2 = 1\} \mid \{X_1 = 0\}) \mathbb{P}(\{X_1 = 0\}) + \mathbb{P}(\{X_2 = 1\} \mid \{X_1 = 1\}) \mathbb{P}(\{X_1 = 1\})$
- 0 pt : $X_2 \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

- 1 pt : S_n prend pour valeur le nombre de boules blanches dans l'urne après les n premiers tirages
- 1 pt : $b \in S_n(\Omega)$ et $b+n \in S_n(\Omega)$
- 1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\Omega) = \llbracket b, b+n \rrbracket$ (cas intermédiaires)

Partie II - La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in \llbracket b, b+n \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\} \mid \{S_n = k\})$.

- 1 pt : si l'événement $\{S_n = k\}$ est réalisé, c'est que l'urne comporte k boules blanches à l'issue des n premiers tirages. L'urne contient donc, à l'issue des n premiers tirages, k boules blanches et $r+b+n$ boules au total (et donc $r+b+n-k$ boules rouges).
- 1 pt : par équiprobabilité, $\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\} \mid \{S_n = k\}) = \frac{k}{r+b+n}$

5. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier :

$$\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{b+r+n}$$

- 0 pt : La v.a.r. S_n est d'espérance finie car c'est une v.a.r. finie OU v.a.r. positive
- 1 pt : FPT sur le SCE $(\{S_n = k\})_{k \in \llbracket b, b+n \rrbracket}$
- 1 pt : $\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) = \sum_{k=b}^{b+n} \mathbb{P}(\{S_n = k\}) \frac{k}{r+b+n} = \frac{1}{r+b+n} \sum_{k=b}^{b+n} k \mathbb{P}(\{S_n = k\}) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{r+b+n}$

6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- 0 pt : initialisation (avec la question 1.)
- 3 pts : hérédité
 - × 1 pt : rédaction récurrence forte
 - × 1 pt : par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n) = b + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = b + n \frac{b}{b+r}$
 - × 1 pt : d'après la question précédente, $\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{r+b+n} = \frac{b}{b+r}$

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Exprimer l'événement $\{S_n = 1\}$ avec les événements $\{X_k = 0\}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- 1 pt : $\{S_n = 1\}$ est réalisé $\Leftrightarrow$ après n tirages l'urne contient 1 boule blanche
 $\Leftrightarrow$ on a tiré que des boules rouges lors des n premiers tirages
 $\Leftrightarrow$ on a tiré une boule rouge au 1^{er} ET ...ET on a tiré une boule rouge au $n^{\text{ème}}$ tirage
- 1 pt : $\{S_n = 1\} = \bigcap_{k=1}^n \{X_k = 0\}$

8. Montrer que $\mathbb{P}(\{S_n = 1\}) = \frac{1}{n+1}$.

• 1 pt : FPC

• 1 pt : $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^k \{X_i=0\}}(\{X_{k+1}=0\}) = \frac{1+k}{2+k}$

• 1 pt : $\mathbb{P}(\{S_n = 1\}) = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{n+1}$ (par télescopage)

On admet dans la suite que l'on a de même $\mathbb{P}(\{S_n = n+1\}) = \frac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket \times \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\} \mid \{S_n = \ell\})$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i) \ell \notin \{k-1, k\}, \quad (ii) \ell = k-1, \quad (iii) \ell = k.$$

• 1 pt : cas $\ell \notin \{k-1, k\}$

$$\mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\} \mid \{S_n = \ell\}) = \frac{\mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\} \cap \{S_n = \ell\})}{\mathbb{P}(\{S_n = \ell\})} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(\{S_n = \ell\})} = 0$$

• 2 pts : cas $\ell = k-1$

× 1 pt :

$$\mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\} \mid \{S_n = k-1\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\} \cap \{S_n = k-1\})}{\mathbb{P}(\{S_n = \ell\})} = \mathbb{P}_{\{S_n=k-1\}}(\{X_{n+1} = 1\})$$

× 1 pt : d'après 4. avec $k-1 \in \mathbb{N}^*$ et $r = b = 1$, $\mathbb{P}_{\{S_n=k-1\}}(\{X_{n+1} = 1\}) = \frac{k-1}{2+n}$

• 1 pt : cas $\ell = k$ (avec un raisonnement similaire au cas précédent) :

$$\mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\} \mid \{S_n = \ell\}) = \frac{2+n-k}{2+n}$$

10. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, on a la relation :

$$\mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\}) = \frac{k-1}{n+2} \mathbb{P}(\{S_n = k-1\}) + \frac{n+2-k}{n+2} \mathbb{P}(\{S_n = k\})$$

• 1 pt : FPT sur le SCE $(\{S_n = \ell\})_{\ell \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$

• 1 pt : $\mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\}) = \mathbb{P}(\{S_n = k-1\}) \mathbb{P}_{\{S_n=k-1\}}(\{S_{n+1} = k\}) + \mathbb{P}(\{S_n = k\}) \mathbb{P}_{\{S_n=k\}}(\{S_{n+1} = k\})$

• 1 pt : d'après la question précédente, on obtient $\mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\}) = \frac{k-1}{n+2} \mathbb{P}(\{S_n = k-1\}) + \frac{n+2-k}{n+2} \mathbb{P}(\{S_n = k\})$

1 pt en tout si FPT réalisée sur une famille qui n'est pas un SCE

11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

• 1 pt : initialisation ($S_0 = 1$ donc on a bien : $S_0 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 1 \rrbracket)$)

• 2 pts : hérédité

× 1 pt : d'après 3. $S_{n+1}(\Omega) = \llbracket 1, n+2 \rrbracket$.

× 1 pt : $\mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\}) = \frac{1}{n+2}$ (utilisation de la question précédente et hypothèse de récurrence)

Exercice 2 /40

Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}$.

On suppose : $u_0 > 0$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.

12. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

- 3 pts : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
 - × 1 pt : initialisation
 - × 2 pts : hérédité
- 0 pt : (v_n) bien définie

13. a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{2^n}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

- 2 pts : critère de négligeabilité

× 0 pt : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln(n)}{2^n} \geq 0$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$

× 1 pt : $\frac{\ln(n)}{2^n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$

× 1 pt : La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

b) (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_n - v_{n-1}$ en fonction de n .

Puis déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (v_n - v_{n-1})$.

• 1 pt : $v_k - v_{k-1} = -\frac{\ln(k)}{2^k}$

• 1 pt : d'après la question précédente, $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ convergente, donc $\sum_{k \geq 1} (v_k - v_{k-1})$ convergente.

(ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\ell = \sigma + v_0$$

• 1 pt : $\sum_{k=1}^n (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_0$

• 1 pt : (v_n) converge d'après la question précédente

• 1 pt : par passage à la limite $\ell = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sigma + v_0$

14. On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ .

On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.

- 2 pts : $\ell > 0 \Leftrightarrow u_0 > e^{-\sigma}$ (dont 1 pt pour la stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$)
- 0 pt : $\ell < 0 \Leftrightarrow u_0 < e^{-\sigma}$

b) En déduire la limite de $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- 1 pt : si $u_0 > e^{-\sigma}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- 1 pt : si $u_0 < e^{-\sigma}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

15. On suppose dans cette question : $u_0 = e^{-\sigma}$.

a) (i) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

- 1 pt : $v_0 = \ln(u_0) = -\sigma = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$
- 1 pt : $v_n = -\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$

(ii) Retrouver dans ce cas la valeur de la limite ℓ de la suite (v_n) .

- 1 pt : comme $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ convergente d'après 2.a) : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$
- 1 pt : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

b) (i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) \geq \frac{\ln(n+1)}{2}$.

- 1 pt : $\ln(u_n) = 2^n v_n = 2^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} = \frac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$
- 1 pt : $\frac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \geq \frac{\ln(n+1)}{2}$ car $\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \geq 0$ (en tant que somme de réels positifs)

(ii) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

- 1 pt : par croissance de exp sur $\mathbb{R}$: $u_n \geq \exp\left(\frac{\ln(n+1)}{2}\right)$
- 1 pt : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Partie II : Approximation de σ

16. a) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$.

- 3 pts :
 - × 1 pt : la fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$
 - × 1 pt : sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se situe donc sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1
 - × 1 pt : équation de la tangente : $y = g(1) + g'(1)(x - 1) = x - 1$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+1}{2^n}$.

- 1 pt : $\frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{k-1}{2^k}$ d'après la question précédente et car $2^k > 0$
- 1 pt : $\sum_{k=n+1}^m \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{k-1}{2^k}$

- 1 pt : $\sum_{k=n+1}^m (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{m-n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$
- 1 pt : $\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ et $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ série géométrique dérivée première et série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$. Elles sont donc convergentes.
- 1 pt : $\sum_{k=n+1}^m (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 4 + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+1}{2^n}$

17. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$.

- 1 pt : $\left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$
- 1 pt : $\left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$ d'après la question précédente

18. Écrire une fonction **Python** (que l'on nommera **approx**) qui, prenant en argument un réel ε strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à ε près.

• 3 pts :

```

1 import numpy as np
2 def approx(eps) :
3     k = 0
4     S = 0
5     while (k+1) / 2**k > eps :
6         k = k + 1
7         S = S + np.log(k) / 2**k
8     sigma = -S
9     return sigma

```

Exercice 3 /40

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2.

Le but du problème est d'étudier la réduction de certaines *matrices de Toeplitz*, c'est-à-dire de matrices d'ordre n de la forme suivante, où $(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$:

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

dans laquelle les coefficients diagonaux sont tous égaux à t_0 , ceux de la première sur-diagonale tous égaux à t_1 , ceux de la première sous-diagonale tous égaux à t_{-1} , etc.

On nomme $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$:

$$\text{Toep}_n(\mathbb{C}) = \{T(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \mid (t_k)_{-n+1 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{C}^{2n-1}\}$$

Partie 0 - Généralités

19. Montrer que $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En donner une base et en préciser la dimension.

- 1 pt : $\text{Toep}_n(\mathbb{C}) = \left\{ \sum_{k=-(n-1)}^{(n-1)} t_k \cdot T(e_k) \mid (t_k)_{-n+1 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{C}^{2n-1} \right\} = \text{Vect} (T(1, 0, \dots, 0), T(0, 1, 0, \dots, 0), \dots, T(0, \dots, 1, 0), T(0, \dots, 0, 1))$
- 1 pt : $\mathcal{F} = (T(1, 0, \dots, 0), \dots, T(0, \dots, 1, 0), T(0, \dots, 0, 1))$ est libre (à démontrer)
- 1 pt : donc $\dim(\text{Toep}_n(\mathbb{C})) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 2n - 1$

20. Un exemple. Soit N la matrice de Toeplitz dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la première sous-diagonale qui valent 1 :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le polynôme caractéristique de N et calculer $\text{Ker}(N)$.

La matrice N peut-elle être semblable à une matrice diagonale ?

- 1 pt : $\text{Sp}(N) = \{0\}$ car N est triangulaire (inférieure) de coefficient diagonaux nuls
- 2 pts : la matrice N n'est pas diagonalisable car si elle l'était elle serait semblable à la matrice nulle donc nulle

b) Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice commutant avec N (c'est-à-dire telle que $MN = NM$).

Montrer que $M = \sum_{i=1}^n m_{i,1} N^{i-1}$.

On pourra commencer par considérer la colonne ME_1 , puis les colonnes ME_k pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, où $(E_1, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

- 0 pt : $M E_1$ est la 1^{ère} colonne de M
- 1 pt : $M E_1 = \sum_{i=1}^n m_{i,1} \cdot E_i$
- 1 pt : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, N^{i-1} \times E_1 = E_i$
- 1 pt : $M \times E_1 = \sum_{i=1}^n m_{i,1} \cdot E_i = \sum_{i=1}^n m_{i,1} \cdot (N^{i-1} \times E_1) = \left(\sum_{i=1}^n m_{i,1} \cdot N^{i-1} \right) \times E_1 = R \times E_1$
- 1 pt : $M \times E_k = M \times (N^{k-1} \times E_1) = N^{k-1} \times (M \times E_1) = N^{k-1} \times (R \times E_1) = R \times (N^{k-1} \times E_1) = R \times E_k$

c) Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec N est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.

- 1 pt : $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, N^i = T(e_{-i})$ est triangulaire inférieure
- 1 pt : si $MN = NM$, $\sum_{i=1}^n m_{i,1} \cdot N^{i-1}$ est donc triangulaire inférieure (stabilité par CL)
- 1 pt : une tringulaire inférieure s'écrit $T(t_{-(n-1)}, \dots, t_{-1}, t_0, 0, \dots, 0) = \sum_{i=0}^{n-1} t_{-i} \cdot N^i$ donc commute avec N

Partie 1 - Cas de la dimension 2

21. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz d'ordre 2, où (a, b, c) sont des complexes.

a) Donner le polynôme caractéristique de A .

- 1 pt : $\chi_A(X) = X^2 - 2aX + (a^2 - bc)$

b) Si $\Delta = bc = 0$, démontrer que la matrice A n'est pas semblable à une matrice diagonale.

- 1 pt : si $\Delta = bc = 0$, alors χ_A admet 1 racine double a
- 1 pt : et est diagonalisable si scalaire ($A = a I_2$ donc $b = c = 0$)

c) Si $\Delta = bc \neq 0$, démontrer que A est semblable à une matrice diagonale.

- 1 pt : en notant z_1 et z_2 les racines de χ_A , E_{z_1}
- 1 pt : $\tilde{\mathcal{B}} = ()$ base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$
- 1 pt : en notant f l'endomorphisme canoniquement associé à A , on remarque :
 $\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$
- 1 pt : deux matrices représentatives d'un même endomorphisme sont semblables

22. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique de M .

- 1 pt : $\chi_M(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$

b) Montrer que M est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des complexes avec $\alpha \neq \beta$.

- 1 pt : si χ_M admet deux racines distinctes α et β alors elle est semblable à une matrice diagonale (raisonnement similaire à 21c)
- 2 pts si χ_M admet une seule racine α
 - × 1 pt : si M semblable à matrice diagonale, alors $M = \alpha \cdot I_2$
 - × 1 pt : sinon, M semblable à matrice triangulaire et semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

c) En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

- 1 pt : si M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = T(0, \alpha, \gamma)$ OK
- 1 pt : sinon M est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$
- 1 pt : en posant $a = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $b = c = \alpha - \beta$, on obtient que $T(c, a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et ainsi par transitivité, M semblable à $T(\alpha - \beta, \frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha - \beta)$

Partie 2 - Un cas particulier : les matrices tridiagonales

Une matrice tridiagonale est une matrice de Toeplitz de type $T(0, \dots, 0, t_{-1}, t_0, t_1, 0, \dots, 0)$, c'est-à-dire une matrice de la forme :

$$A_n(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix}$$

où (a, b, c) sont des complexes.

On fixe (a, b, c) trois nombres complexes tels que $bc \neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a, b, c)$.

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Supposons : $\begin{cases} X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \\ A_n(a, b, c) X = \lambda \cdot X \end{cases}$

23. Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors $(x_1, \dots, x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad bx_{k+2} + (a - \lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

• 1 pt

24. Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation :

$$bx^2 + (a - \lambda)x + c = 0 \quad (1)$$

• 1 pt : si $(a - \lambda)^2 - 4bc > 0$, on note r_1 et r_2 les deux solutions réelles de (1), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$$

• 1 pt : si $(a - \lambda)^2 - 4bc = 0$, on note r_0 l'unique solution réelle de (1), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_k = \alpha r_0^k + \beta k r_0^k$$

• 1 pt : si $(a - \lambda)^2 - 4bc < 0$, on note $u + iv$ et $u - iv$ les deux solutions complexes conjuguées de (1), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_k = \alpha u \cos(vk) + \beta u \sin(vk)$$

25. À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1} , montrer que (1) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 .

• 2 pts

26. Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que $\frac{r_1}{r_2}$ appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$, ensemble des racines $(n+1)$ -èmes de l'unité.

• 1 pt : $r_1 \neq 0$ et $r_2 \neq 0$

• 1 pt : $\frac{r_1}{r_2} \in \mathbb{U}_{n+1}$

27. En utilisant l'équation (1) satisfaite par r_1 et r_2 , déterminer $r_1 r_2$ et $r_1 + r_2$.

En déduire qu'il existe un entier $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que :

$$\lambda = a + 2\rho \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) \quad (2)$$

• 1 pt : $r_1 + r_2 = \frac{\lambda - a}{b}$ et $r_1 r_2 = \frac{c}{b}$

• 1 pt : $\lambda = a + b(r_1 + r_2) = a + \varepsilon \rho \left(e^{\frac{i\ell\pi}{n+1}} + e^{-\frac{i\ell\pi}{n+1}} \right)$

28. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout k dans $\llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $x_k = 2i \alpha \frac{\rho^k}{b^k} \sin\left(\frac{\ell k \pi}{n+1}\right)$.

• 1 pt : $x_k = K_1 (r_1^k - r_2^k) = K_1 \frac{\rho^k}{b^k} \left(e^{\frac{i\ell k \pi}{n+1}} - e^{-\frac{i\ell k \pi}{n+1}} \right)$

29. Conclure que $A_n(a, b, c)$ est semblable à une matrice diagonale.

• 2 pts