
DS9

Exercice 1 : Les urnes de Pólya

- On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher.
- On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :
 - si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
 - si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.
- Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage dans un cas particulier.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche, 0 si la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = b + \sum_{k=1}^n X_k$$

- On rappelle que si E et F sont deux événements avec $\mathbb{P}(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $\mathbb{P}(E | F)$ ou $\mathbb{P}_F(E)$) par :

$$\mathbb{P}(E | F) = \mathbb{P}_F(E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$$

Partie I - Préliminaires

- Déterminer la loi de X_1 .
- Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $\{X_1 = 1\}$. En déduire la loi de X_2 .
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II - La loi de X_n

- Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
- Pour tout $k \in \llbracket b, n + b \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\} | \{S_n = k\})$.
- À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier :

$$\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{b + r + n}$$

- Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

• Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Exprimer l'événement $\{S_n = 1\}$ avec les événements $\{X_k = 0\}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

8. Montrer que $\mathbb{P}(\{S_n = 1\}) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $\mathbb{P}(\{S_n = n+1\}) = \frac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket \times \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\} \mid \{S_n = \ell\})$ dans chacun des trois cas suivants :

(i) $\ell \notin \{k-1, k\}$,

(ii) $\ell = k-1$,

(iii) $\ell = k$.

10. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, on a la relation :

$$\mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\}) = \frac{k-1}{n+2} \mathbb{P}(\{S_n = k-1\}) + \frac{n+2-k}{n+2} \mathbb{P}(\{S_n = k\})$$

11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

Exercice 2

Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}$.

On suppose : $u_0 > 0$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.

12. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

13. a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{2^n}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

b) (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_n - v_{n-1}$ en fonction de n .

Puis déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (v_n - v_{n-1})$.

(ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\ell = \sigma + v_0$$

14. On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ .

On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.

b) En déduire la limite de $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

15. On suppose dans cette question : $u_0 = e^{-\sigma}$.

a) (i) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

(ii) Retrouver dans ce cas la valeur de la limite ℓ de la suite (v_n) .

b) (i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) \geq \frac{\ln(n+1)}{2}$.

(ii) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Partie II : Approximation de σ

16. a) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+1}{2^n}$.

17. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$.

18. Écrire une fonction **Python** (que l'on nommera **approx**) qui, prenant en argument un réel ε strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à ε près.

Exercice 3

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2.

Le but du problème est d'étudier la réduction de certaines *matrices de Toeplitz*, c'est-à-dire de matrices d'ordre n de la forme suivante, où $(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$:

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

dans laquelle les coefficients diagonaux sont tous égaux à t_0 , ceux de la première sur-diagonale tous égaux à t_1 , ceux de la première sous-diagonale tous égaux à t_{-1} , etc.

On nomme $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$:

$$\text{Toep}_n(\mathbb{C}) = \{T(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \mid (t_k)_{-n+1 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{C}^{2n-1}\}$$

Partie 0 - Généralités

19. Montrer que $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En donner une base et en préciser la dimension.

20. *Un exemple.* Soit N la matrice de Toeplitz dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la première sous-diagonale qui valent 1 :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le polynôme caractéristique de N et calculer $\text{Ker}(N)$.

La matrice N peut-elle être semblable à une matrice diagonale ?

- b) Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice commutant avec N (c'est-à-dire telle que $MN = NM$).

Montrer que $M = \sum_{i=1}^n m_{i,1} N^{i-1}$.

On pourra commencer par considérer la colonne ME_1 , puis les colonnes ME_k pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, où $(E_1, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

- c) Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec N est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.

Partie 1 - Cas de la dimension 2

21. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz d'ordre 2, où (a, b, c) sont des complexes.

- a) Donner le polynôme caractéristique de A .
b) Si $\Delta = bc = 0$, démontrer que la matrice A n'est pas semblable à une matrice diagonale.
c) Si $\Delta = bc \neq 0$, démontrer que A est semblable à une matrice diagonale.

22. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

- a) Déterminer le polynôme caractéristique de M .
b) Montrer que M est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des complexes avec $\alpha \neq \beta$.
c) En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

Partie 2 - Un cas particulier : les matrices tridiagonales

Une matrice tridiagonale est une matrice de Toeplitz de type $T(0, \dots, 0, t_{-1}, t_0, t_1, 0, \dots, 0)$, c'est-à-dire une matrice de la forme :

$$A_n(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix}$$

où (a, b, c) sont des complexes.

On fixe (a, b, c) trois nombres complexes tels que $bc \neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a, b, c)$.

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Supposons : $\begin{cases} X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \\ A_n(a, b, c)X = \lambda \cdot X \end{cases}$

23. Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors $(x_1, \dots, x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, bx_{k+2} + (a - \lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

24. Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation :

$$bx^2 + (a - \lambda)x + c = 0 \tag{1}$$

25. À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1} , montrer que (1) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 .

26. Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que $\frac{r_1}{r_2}$ appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$, ensemble des racines $(n+1)$ -èmes de l'unité.

27. En utilisant l'équation (1) satisfaite par r_1 et r_2 , déterminer $r_1 r_2$ et $r_1 + r_2$.

En déduire qu'il existe un entier $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que :

$$\lambda = a + 2\rho \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) \quad (2)$$

28. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout k dans $\llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $x_k = 2i \alpha \frac{\rho^k}{b^k} \sin\left(\frac{\ell k \pi}{n+1}\right)$.

29. Conclure que $A_n(a, b, c)$ est semblable à une matrice diagonale.