

## DS8



On traitera **OBLIGATOIREMENT** l'exercice de cours. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

### Exercice 1 : Cours

1. (\*) Donner la caractérisation matricielle des projecteurs, puis des symétries.

*Démonstration.*

1)  $p$  est un projecteur de  $E \Leftrightarrow$  Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \left( \begin{array}{c|c} I_{n_1} & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array} \right) \text{ où } n_1 = \dim(\text{Ker}(p - \text{id}_E))$$

2)  $s$  est une symétrie de  $E \Leftrightarrow$  Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \left( \begin{array}{c|c} I_{n_1} & (0) \\ \hline (0) & -I_{n_2} \end{array} \right) \text{ où } \begin{cases} n_1 = \dim(\text{Ker}(s - \text{id}_E)) \\ n_2 = \dim(\text{Ker}(s + \text{id}_E)) \end{cases}$$

□

2. (\*) On joue avec une pièce donnant pile avec probabilité  $p \in ]0, 1[$ , en effectuant des lancers mutuellement indépendants. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On effectue  $n$  lancers de cette pièce. On note  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé associé à cette expérience. On note  $X$  la variable aléatoire réelle égale au rang du premier pile. Notons qu'il est possible de ne jamais obtenir pile au cours des  $n$  lancers. Dans ce cas, la variable aléatoire  $X$  prend la valeur  $n + 1$ . Déterminer la loi de  $X$ .

*Démonstration.*

- Tout d'abord, comme on effectue  $n$  lancers de pièce et que  $X$  peut de plus prendre la valeur  $n + 1$ , alors :  $X(\Omega) \subset \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ .

$$X(\Omega) \subset \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$$

- Soit  $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ .  
Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note :

$P_i$  : « on obtient pile au  $i^{\text{ème}}$  lancer »

$F_i$  : « on obtient face au  $i^{\text{ème}}$  lancer »

Deux cas se présentent :

× si  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on remarque alors :

L'événement  $\{X = k\}$  est réalisé  $\Leftrightarrow$  le 1<sup>er</sup> pile est obtenu au  $k^{\text{ème}}$  lancer

$\Leftrightarrow$  (on obtient face au 1<sup>er</sup> lancer

ET on obtient face au 2<sup>ème</sup> lancer

$\vdots$

ET on obtient face au  $(k-1)^{\text{ème}}$  lancer

ET on obtient pile au  $k^{\text{ème}}$  lancer)

$\Leftrightarrow$  (l'événement  $F_1$  est réalisé

ET l'événement  $F_2$  est réalisé

$\vdots$

ET l'événement  $F_{k-1}$  est réalisé

ET l'événement  $P_k$  est réalisé)

$\Leftrightarrow$  l'événement  $F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k$  est réalisé

Ainsi :  $\{X = k\} = \left( \bigcap_{i=1}^{k-1} F_i \right) \cap P_k$ . On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\{X = k\}) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap P_k\right) \\
 &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(F_i)\right) \times \mathbb{P}(P_k) && \text{(car } F_1, \dots, F_{k-1}, P_k \text{ sont} \\
 &&& \text{mutuellement indépendants} \\
 &&& \text{(car les lancers le sont))} \\
 &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} (1 - \mathbb{P}(P_i))\right) \times \mathbb{P}(P_k) \\
 &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} (1 - p)\right) \times p && \text{(d'après l'énoncé)} \\
 &= (1 - p)^{k-1} p
 \end{aligned}$$

× si  $k = n + 1$ , alors, puisque la famille  $(\{X = k\})_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$  est un système complet d'événements :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\{X = n + 1\}) &= 1 - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{X = k\}) \\
 &= 1 - \sum_{k=1}^n (1-p)^{k-1} p && (d'après le point précédent) \\
 &= 1 - p \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k && (par décalage d'indice) \\
 &= 1 - \cancel{p} \frac{1 - (1-p)^n}{\cancel{1 - (1-p)}} \\
 &= \cancel{1} - (\cancel{1} - (1-p)^n) \\
 &= (1-p)^n
 \end{aligned}$$

Finalement :  $\forall k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket, \mathbb{P}(\{X = k\}) = \begin{cases} (1-p)^{k-1} p & \text{si } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ (1-p)^n & \text{si } k = n + 1 \end{cases}.$

□

## Exercice 2

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on désigne par  $P_n$  l'événement « Pile apparaît au  $n^{\text{ème}}$  lancer » et par  $F_n$  l'événement « Face apparaît au  $n^{\text{ème}}$  lancer ».

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

On note :

$$\forall n \geq 3, B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \text{ et } U_n = \bigcup_{i=3}^n B_i$$

On pose enfin  $u_1 = u_2 = 0$  et pour tout  $n \geq 3$ ,  $u_n = \mathbb{P}(U_n)$ .

3. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 3}$  est monotone et convergente.

*Démonstration.*

- Soit  $n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket$ .

On remarque :

$$U_{n+1} = \bigcup_{i=3}^{n+1} B_i = \left( \bigcup_{i=3}^n B_i \right) \cup B_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$$

Ainsi, par définition de l'opérateur  $\cup : U_n \subset U_{n+1}$ . Donc, par croissance de  $\mathbb{P}$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(U_n) & \leq & \mathbb{P}(U_{n+1}) \\ \parallel & & \parallel \\ u_n & \leq & u_{n+1} \end{array}$$

On en déduit que la suite  $(u_n)$  est croissante.

- De plus, par propriété de  $\mathbb{P}$ , pour tout  $n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket$  :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \leq & \mathbb{P}(U_n) \leq 1 \\ & \parallel & \\ & u_n & \end{array}$$

La suite  $(u_n)$  est donc :

- × croissante,
- × majorée par 1.

On en déduit que la suite  $(u_n)$  est convergente.

□

4. a) Pour tout  $n \geq 3$ , calculer  $\mathbb{P}(B_n)$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) && (\text{par définition de } B_n) \\ &= \mathbb{P}(P_{n-2}) \times \mathbb{P}(P_{n-1}) \times \mathbb{P}(F_n) && (\text{car } P_{n-2}, P_{n-1} \text{ et } F_n \text{ sont mutuellement} \\ &&& \text{indépendants (car les lancers le sont)}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} && (\text{car la pièce est équilibrée}) \end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall n \geq 3, \mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{8}$ .

□

b) Montrer que, pour tout  $n \geq 3$ , les événements  $B_n$ ,  $B_{n+1}$  et  $B_{n+2}$  sont deux à deux incompatibles.

*Démonstration.*

Soit  $n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket$ .

- Démontrons que  $B_n$  et  $B_{n+1}$  sont incompatibles.

$$\begin{aligned}
 B_n \cap B_{n+1} &= (P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) \cap (P_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1}) \\
 &= P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap (F_n \cap P_n) \cap F_{n+1} && \text{(par associativité et commutativité de } \cap \text{)} \\
 &= P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap \emptyset \cap F_{n+1} && \text{(car } F_n \text{ et } P_n \text{ sont incompatibles)} \\
 &= \emptyset && \text{(car } \emptyset \text{ est l'élément absorbant pour } \cap \text{)}
 \end{aligned}$$

Les événements  $B_n$  et  $B_{n+1}$  sont donc incompatibles.

- Démontrons que  $B_n$  et  $B_{n+2}$  sont incompatibles.

$$\begin{aligned}
 B_n \cap B_{n+2} &= (P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) \cap (P_n \cap P_{n+1} \cap F_{n+2}) \\
 &= P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap (F_n \cap P_n) \cap P_{n+1} \cap F_{n+2} && \text{(par associativité de } \cap \text{)} \\
 &= P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap \emptyset \cap P_{n+1} \cap F_{n+2} && \text{(car } F_n \text{ et } P_n \text{ sont incompatibles)} \\
 &= \emptyset && \text{(car } \emptyset \text{ est l'élément absorbant pour } \cap \text{)}
 \end{aligned}$$

Les événements  $B_n$  et  $B_{n+2}$  sont donc incompatibles.

- Démontrons que  $B_{n+1}$  et  $B_{n+2}$  sont incompatibles.

$$\begin{aligned}
 B_{n+1} \cap B_{n+2} &= (P_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1}) \cap (P_n \cap P_{n+1} \cap F_{n+2}) \\
 &= P_{n-1} \cap P_n \cap (F_{n+1} \cap P_{n+1}) \cap F_{n+2} && \text{(par associativité et commutativité de } \cap \text{)} \\
 &= P_{n-1} \cap P_n \cap \emptyset \cap F_{n+2} && \text{(car } F_{n+1} \text{ et } P_{n+1} \text{ sont incompatibles)} \\
 &= \emptyset && \text{(car } \emptyset \text{ est l'élément absorbant pour } \cap \text{)}
 \end{aligned}$$

Les événements  $B_{n+1}$  et  $B_{n+2}$  sont donc incompatibles.

Finalement, pour tout  $n \geq 3$ , les événements  $B_n$ ,  $B_{n+1}$  et  $B_{n+2}$  sont deux à deux incompatibles.

□

c) Calculer les valeurs de  $u_3$ ,  $u_4$  et  $u_5$ .

*Démonstration.*

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} u_3 &= \mathbb{P}(U_3) && (\text{par définition de } u_3) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=3}^3 B_i\right) && (\text{par définition de } U_3) \\ &= \mathbb{P}(B_3) = \frac{1}{8} && (\text{d'après } \textcolor{red}{4a}) \end{aligned}$$

$$u_3 = \frac{1}{8}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned} u_4 &= \mathbb{P}(U_4) && (\text{par définition de } u_4) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=3}^4 B_i\right) && (\text{par définition de } U_4) \\ &= \mathbb{P}(B_3 \cup B_4) \\ &= \mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(B_4) && (\text{car, d'après la question précédente pour } n=3, \text{ les événements } B_3 \text{ et } B_4 \text{ sont incompatibles}) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} && (\text{d'après } \textcolor{red}{4a}) \end{aligned}$$

$$u_4 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} u_5 &= \mathbb{P}(U_5) && (\text{par définition de } u_5) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=3}^5 B_i\right) && (\text{par définition de } U_5) \\ &= \mathbb{P}(B_3 \cup B_4 \cup B_5) \\ &= \mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(B_4) + \mathbb{P}(B_5) && (\text{car, d'après la question précédente pour } n=3, \text{ les événements } B_3, B_4 \text{ et } B_5 \text{ sont 2 à 2 incompatibles}) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} && (\text{d'après } \textcolor{red}{4a}) \end{aligned}$$

$$u_5 = \frac{3}{8}$$

□

5. Dans cette question, on suppose  $n \geq 5$ .

a) Comparer les événements  $U_n \cap B_{n+1}$  et  $U_{n-2} \cap B_{n+1}$ . Préciser leurs probabilités respectives.

*Démonstration.*

- On remarque tout d'abord :

$$\begin{aligned}
 & U_n \cap B_{n+1} \\
 = & \left( \bigcup_{i=1}^n B_i \right) \cap B_{n+1} \\
 = & \left( \left( \bigcup_{i=1}^{n-2} B_i \right) \cup B_{n-1} \cup B_n \right) \cap B_{n+1} \\
 = & \left( \left( \bigcup_{i=1}^{n-2} B_i \right) \cap B_{n+1} \right) \cup (B_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1}) \quad (\text{par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup) \\
 = & (U_{n-2} \cap B_{n+1}) \cup (B_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1}) \quad (\text{par définition de } U_{n-2}) \\
 = & (U_{n-2} \cap B_{n+1}) \cup \emptyset \cup \emptyset \quad (\text{car, d'après la question précédente pour } n-1, \text{ les événements } B_{n-1}, B_n \text{ et } B_{n+1} \text{ sont 2 à 2 incompatibles})
 \end{aligned}$$

Finalement :  $U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$ .

- On en déduit :

$$\mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(U_{n-2} \cap B_{n+1})$$

Or :

- × une réalisation de l'événement  $B_{n+1} = P_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1}$  ne fait intervenir que les lancers  $n-1, n$  et  $n+1$ ,
- × une réalisation de  $U_{n-2}$  ne fait intervenir que les lancers 1 à  $n-2$ . En effet :

$$U_{n-2} = B_3 \cup \dots \cup B_{n-2} = (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup \dots \cup (P_{n-4} \cap P_{n-3} \cap F_{n-2})$$

De plus, les lancers sont mutuellement indépendants.

On en déduit que les événements  $U_{n-2}$  et  $B_{n+1}$  sont indépendants.

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) &= \mathbb{P}(U_{n-2} \cap B_{n+1}) \\
 &= \mathbb{P}(U_{n-2}) \times \mathbb{P}(B_{n+1}) \quad (\text{car les événements } U_{n-2} \text{ et } B_{n+1} \text{ sont indépendants}) \\
 &= \mathbb{P}(U_{n-2}) \times \frac{1}{8} \quad (\text{d'après 4a})
 \end{aligned}$$

Finalement :  $\mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = \frac{1}{8} u_{n-2}$ .

□

b) Montrer que pour tout  $n \geq 3$ ,  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket$ .

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathbb{P}(U_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(U_n \cup B_{n+1}) && \text{(comme démontré en 3)} \\ &= \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) && \text{(par formule du crible)} \\ &= u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} u_{n-2} && \text{(d'après 4a et la question précédente)} \end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall n \geq 3, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$ .

□

c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

*Démonstration.*

- D'après la question 3, la suite  $(u_n)$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.
- De plus, d'après la question précédente, pour tout  $n \geq 3$  :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$$

Ainsi, par passage à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  :

$$\begin{array}{ccccc} u_{n+1} & = & u_n & + & \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \\ \downarrow \scriptstyle \frac{1}{8} & & \downarrow \scriptstyle \frac{1}{8} & & \downarrow \scriptstyle \frac{1}{8} \\ \ell & = & \ell & + & \frac{1}{8}(1 - \ell) \end{array}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{8}(1 - \ell) = 0$$

Ce qui implique :  $\ell = 1$ .

La suite  $(u_n)$  converge donc vers 1.

□

6. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $v_n = 1 - u_n$ .

a) Trouver  $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3}$ .

*Démonstration.*

Soit  $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3} &= \beta(1 - u_{n+2}) + \gamma(1 - u_{n+3}) && \text{(par définition de } v_{n+2} \text{ et } v_{n+3}) \\ &= \beta + \gamma - \beta u_{n+2} - \gamma u_{n+3} \\ &= \beta + \gamma - \beta u_{n+2} - \gamma \left( u_{n+2} + \frac{1}{8}(1 - u_n) \right) && \text{(d'après 5b appliquée à } n+2) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3} &= \beta + \gamma - (\beta + \gamma) u_{n+2} - \gamma \frac{1}{8} (1 - u_n) \\ &= \beta + \gamma - (\beta + \gamma) u_{n+2} - \gamma \frac{1}{8} v_n \quad (\text{par définition de } v_n)\end{aligned}$$

Ainsi, pour avoir :

$$\beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3} = v_n$$

on souhaite :

$$\beta + \gamma - (\beta + \gamma) u_{n+2} - \gamma \frac{1}{8} v_n = v_n$$

On choisit donc :  $\gamma = -8$  et  $\beta = 8$ .

□

b) Montrer que la série de terme général  $v_n$  est convergente et calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .

*Démonstration.*

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n v_k &= \sum_{k=0}^n (8 v_{k+2} - 8 v_{k+3}) && (\text{d'après la question précédente}) \\ &= 8 \sum_{k=0}^n (v_{k+2} - v_{k+3}) \\ &= 8 \sum_{k=2}^{n+2} (v_k - v_{k+1}) && (\text{par décalage d'indice}) \\ &= 8 (v_2 - v_{n+3}) && (\text{par télescopage}) \\ &= 8 ((\textcolor{red}{x} - u_2) - (\textcolor{red}{x} - u_{n+3})) && (\text{par définition de } v_2 \text{ et } v_{n+3}) \\ &= 8 (u_{n+3} - u_2)\end{aligned}$$

- Or, d'après la question [3](#), la suite  $(u_n)$  converge. Il en est donc de même de la suite  $(u_{n+3})$ .

On en déduit que la série  $\sum v_n$  est convergente.

- De plus :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} v_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 8 (u_{n+3} - u_2) \\ &= 8 (1 - u_2) && (\text{d'après } \textcolor{red}{23a})\end{aligned}$$

Enfin :

$$u_2 = \mathbb{P}(U_2) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=3}^2 B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \emptyset} B_i\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Finalement :  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 8 (1 - 0) = 8$ .

□

## Exercice 3 : Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes (adaptation CCINP PC 2022)

### Présentation générale

- On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si  $U \in \mathbb{C}[X]$  et  $V \in \mathbb{C}[X]$  sont deux polynômes avec  $V \neq 0$ , alors il existe un unique couple  $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$  tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V))$$

- Les polynômes  $Q$  et  $R$  sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme  $U$  par  $V$ .
- Dans cet exercice, on se donne un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et un couple  $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$  tel que  $\deg(B) = n+1$ . **On considère également l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{C}_n[X]$  qui à un polynôme  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  associe le reste dans la division euclidienne de  $AP$  par  $B$ .**
- Par exemple, si l'on suppose :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1$$

alors, en effectuant la division euclidienne de  $AP$  par  $B$ , on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X,$$

et donc :  $\varphi(P) = 2X^2 + X$ .

### Partie I- Généralités sur l'application $\varphi$

- Dans cette partie, on démontre que l'application  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}_n[X]$ .
7. Justifier que pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ ,  $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$ .

*Démonstration.*

Soit  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ .

- Par définition de  $\varphi$ ,  $\varphi(P)$  est le reste de la division euclidienne de  $AP$  par  $B$ . On obtient donc déjà :  $\varphi(P) \in \mathbb{C}[X]$ .
- On sait de plus :

- × d'une part :  $AP \in \mathbb{C}[X]$  et  $B \in \mathbb{C}[X]$ ,
- × d'autre part :  $B \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ , car :  $\deg(B) = n + 1 \neq -\infty$ ,

Ainsi, par théorème de division euclidienne, il existe un unique  $(Q, R) \in (\mathbb{C}[X])^2$  tel que :

$$\begin{cases} AP = BQ + R \\ R = 0_{\mathbb{C}[X]} \text{ ou } \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

Par définition de  $\varphi(P)$ , on remarque :  $\varphi(P) = R$ . Ainsi :

$$\deg(\varphi(P)) < \deg(B) = n + 1$$

Comme le degré d'un polynôme est un entier ou  $-\infty$ , on en déduit :

$$\deg(\varphi(P)) \leq n$$

Finalement :  $\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$ .

**Commentaire**

- On peut remarquer que la démonstration ci-dessus reste valide si  $P \in \mathbb{C}[X]$ , autrement dit, si le polynôme  $P$  est de degré quelconque.

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$$

- Néanmoins, l'objectif annoncé de la **partie I** est de démontrer que l'application  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}_n[X]$ , c'est-à-dire :
  - × l'application  $\varphi$  est linéaire,
  - ×  $\varphi(\mathbb{C}_n[X]) \subset \mathbb{C}_n[X]$ , autrement dit :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$$

Il est donc effectivement plus naturel de démontrer que la propriété à démontrer est vérifiée sur  $\mathbb{C}_n[X]$ . □

- On considère deux polynômes  $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$  et  $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$ . Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe  $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$  et  $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$  tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2$$

8. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de  $A(P_1 + \lambda P_2)$  par  $B$  en fonction de  $\lambda$  et des polynômes  $Q_1, Q_2, R_1$  et  $R_2$  en justifiant votre réponse.

En déduire que  $\varphi$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}_n[X]$ .

*Démonstration.*

- On remarque :
  - × d'une part :

$$\begin{aligned} A(P_1 + \lambda \cdot P_2) &= AP_1 + \lambda \cdot AP_2 \\ &= (BQ_1 + R_1) + \lambda \cdot (BQ_2 + R_2) \quad (d'après l'énoncé) \\ &= B(Q_1 + \lambda \cdot Q_2) + (R_1 + \lambda \cdot R_2) \end{aligned}$$

On note alors :

$$\begin{cases} Q = Q_1 + \lambda \cdot Q_2 \\ R = R_1 + \lambda \cdot R_2 \end{cases}$$

On a démontré :  $A(P_1 + \lambda \cdot P_2) = BQ + R$ .

- × d'autre part :

$$\deg(R) = \deg(R_1 + \lambda \cdot R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(\lambda \cdot R_2))$$

Or :  $\deg(\lambda \cdot R_2) \leq \deg(R_2)$ .

**Commentaire**

Plus précisément :

- × si  $\lambda = 0$ , alors :

$$\deg(\lambda \cdot R_2) = \deg(0_{\mathbb{C}[X]}) = -\infty$$

Donc :  $\deg(\lambda \cdot R_2) \leq \deg(R_2)$ .

- × si  $\lambda \neq 0$ , alors :

$$\deg(\lambda \cdot R_2) = \deg(R_2)$$

On obtient :

$$\deg(R) \leq \max(\deg(R_1), \deg(\lambda \cdot R_2)) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2))$$

De plus, le polynôme  $R_1$  (resp.  $R_2$ ) est le reste dans la division euclidienne de  $AP_1$  (resp.  $AP_2$ ) par  $B$ . On en déduit :

$$\deg(R_1) < \deg(B) \quad \text{et} \quad \deg(R_2) < \deg(B)$$

On obtient :

$$\deg(R) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B)$$

On a démontré :

$$\begin{cases} A(P_1 + \lambda \cdot P_2) = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

Par unicité du quotient et du reste d'une division euclidienne, les polynômes  $Q$  et  $R$  sont donc respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de  $A(P_1 + \lambda \cdot P_2)$  par  $B$ .

- Démontrons que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}_n[X]$ .
  - × On a déjà démontré en question précédente que l'application  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{C}_n[X]$ .
  - × Démontrons que l'application  $\varphi$  est linéaire.  
Soit  $(\lambda) \in \mathbb{C}$ . Soit  $(P_1, P_2) \in (\mathbb{C}_n[X])^2$ .
    - Tout d'abord, par définition de  $\varphi$ , le polynôme  $\varphi(P_1)$  est le reste dans la division euclidienne de  $AP_1$  par  $B$ .  
De même, le polynôme  $\varphi(P_2)$  est le reste dans la division euclidienne de  $AP_2$  par  $B$ .
    - D'après le point précédent, le polynôme  $\varphi(P_1) + \lambda \cdot \varphi(P_2)$  est le reste dans la division euclidienne de  $A(P_1 + \lambda \cdot P_2)$  par  $B$ . C'est donc le polynôme  $\varphi(P_1 + \lambda \cdot P_2)$ .

Autrement dit :

$$\varphi(P_1) + \lambda \cdot \varphi(P_2) = \varphi(P_1 + \lambda \cdot P_2)$$

L'application  $\varphi$  est donc linéaire.

L'application  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

### Commentaire

Rappelons qu'on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} \text{L'application } \varphi \text{ est linéaire} &\Leftrightarrow \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \varphi(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) = \lambda_1 \cdot \varphi(P_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(P_2) \\ &\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C}, \varphi(\lambda \cdot P_1 + P_2) = \lambda \cdot \varphi(P_1) + \varphi(P_2) \\ &\Leftrightarrow \forall \mu \in \mathbb{C}, \varphi(P_1 + \mu \cdot P_2) = \varphi(P_1) + \mu \cdot \varphi(P_2) \end{aligned}$$

C'est la dernière caractérisation de la linéarité que l'on utilise ici, puisque c'est ce que nous pousse à faire l'énoncé dans la 1<sup>ère</sup> partie de la question. □

## Partie II - Étude d'un premier exemple

- Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1$$

9. Montrer que la matrice de l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{C}_2[X]$  dans la base  $(1, X, X^2)$  est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

*Démonstration.*

On note  $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$  la base fournie par l'énoncé. Autrement dit :

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X, \quad P_2(X) = X^2$$

- Tout d'abord :

$$AP_0(X) = (X^2 + 2X) \times 1 = X^2 + 2X$$

Ainsi :

$$\begin{cases} AP_0 = 0_{\mathbb{C}[X]} \times B + A \\ \deg(A) < \deg(B) \end{cases}$$

On en déduit que  $A$  est le reste dans la division euclidienne de  $AP_0$  par  $B$ . Ainsi :

$$\varphi(P_0) = A = 2 \cdot P_1 + P_2$$

On en déduit :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(P_0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- Ensuite :

$$AP_1(X) = (X^2 + 2X) \times X = X^3 + 2X^2$$

Ainsi :

$$\begin{cases} AP_1(X) = 1 \times B(X) + (X^2 + X + 1) \\ \deg(X^2 + X + 1) < \deg(B) \end{cases}$$

On en déduit que  $R_1(X) = X^2 + X + 1$  est le reste dans la division euclidienne de  $AP_1$  par  $B$ . Ainsi :

$$\varphi(P_1) = R_1 = P_0 + P_1 + P_2$$

On en déduit :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(P_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- Enfin :

$$AP_2(X) = (X^2 + 2X) \times X^2 = X^4 + 2X^3$$

Ainsi :

$$\begin{cases} AP_2(X) = (X + 1) \times B(X) + (2X + 1) \\ \deg(2X + 1) < \deg(B) \end{cases}$$

On en déduit que  $R_2(X) = 2X + 1$  est le reste dans la division euclidienne de  $AP_2$  par  $B$ . Ainsi :

$$\varphi(P_2) = R_2 = P_0 + 2 \cdot P_1$$

On en déduit :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(P_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Finalement :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$ .

□

**10.** Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on note :

$$E_\lambda = \text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]})$$

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels  $E_{-1}$  et  $E_3$ .

*Démonstration.*

- Déterminons une base de  $E_{-1}$ .

× Soit  $P \in \mathbb{C}_2[X]$ .

Alors il existe  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  tel que :  $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

$$P \in E_{-1} \iff (\varphi + \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]})(P) = 0_{\mathbb{C}_2[X]}$$

$$\iff (M + I_3)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y - z \end{cases}$$

× On obtient :

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \{x \cdot P_0 + y \cdot P_1 + z \cdot P_2 \in \mathbb{C}_2[X] \mid x = -y - z\} \\ &= \{(-y - z) \cdot P_0 + y \cdot P_1 + z \cdot P_2 \mid (y, z) \in \mathbb{C}^2\} \\ &= \{y \cdot (-P_0 + P_1) + z \cdot (-P_0 + P_2) \mid (y, z) \in \mathbb{C}^2\} \\ &= \text{Vect}(-P_0 + P_1, -P_0 + P_2) \end{aligned}$$

- × La famille  $\mathcal{F}_{-1} = (P_1 - P_0, P_2 - P_0)$  est :
  - génératrice de  $E_{-1}$ , d'après ce qui précède,
  - libre, car elle est constituée de 2 vecteurs non colinéaires.

La famille  $\mathcal{F}_{-1} = (P_1 - P_0, P_2 - P_0)$  est donc une base de  $E_{-1}$  et :  
 $\dim(E_{-1}) = \text{Card}(\mathcal{F}_{-1}) = 2$

### Commentaire

On aurait également pu procéder par lecture matricielle.

- On sait que :
  - × l'espace vectoriel  $\mathbb{C}_2[X]$  est de dimension finie,
  - × l'application  $\varphi + \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]}$  est linéaire, d'après 8,

D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccccc} \dim(\mathbb{C}_2[X]) & = & \dim(\text{Ker}(\varphi + \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]})) & + & \dim(\text{Im}(\varphi + \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]})) & & \\ \parallel & & & & \parallel & & \\ 3 & & & & \text{rg}(\varphi + \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]}) & = & \text{rg}(M + I_3) \end{array}$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{rg}(M + I_3) &= \text{rg} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \text{rg} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= 1 \quad (\text{car} : L_1 \neq 0_{\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})}) \end{aligned}$$

On en déduit :  $\dim(E_{-1}) = \dim(\text{Ker}(\varphi + \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]})) = 3 - 1 = 2$ .

- De plus, on remarque :  $(P_1 - P_0, P_2 - P_0) \in (E_{-1})^2$ . En effet :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}((\varphi + \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]})(P_1 - P_0)) = (M + I_3) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(0_{\mathbb{C}_2[X]})$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}((\varphi + \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]})(P_2 - P_0)) = (M + I_3) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(0_{\mathbb{C}_2[X]})$$

- La famille  $\mathcal{F}_{-1} = (P_1 - P_0, P_2 - P_0)$  :
    - × est libre, car elle est constituée de 2 vecteurs non colinéaires,
    - × vérifie :  $\text{Card}(\mathcal{F}_{-1}) = 2 = \dim(E_{-1})$ .
- C'est donc une base de  $E_{-1}$ .

- Déterminons une base de  $E_3$ .

× Soit  $P \in \mathbb{C}_2[X]$ .

Alors il existe  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  tel que :  $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

$$P \in E_3 \iff (\varphi - 3 \cdot \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]})(P) = 0_{\mathbb{C}_2[X]}$$

$$\iff (M - 3 \cdot I_3)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow 3L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ -4y + 8z = 0 \\ 4y - 8z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ -4y + 8z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} -3x + y = -z \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} -3x = -3z \\ y = 2z \end{cases}$$

× On obtient :

$$\begin{aligned} E_3 &= \{x \cdot P_0 + y \cdot P_1 + z \cdot P_2 \in \mathbb{C}_2[X] \mid x = z \text{ ET } y = 2z\} \\ &= \{z \cdot P_0 + 2z \cdot P_1 + z \cdot P_2 \mid z \in \mathbb{C}\} \\ &= \{z \cdot (P_0 + 2 \cdot P_1 + P_2) \mid z \in \mathbb{C}\} \\ &= \text{Vect}(P_0 + 2 \cdot P_1 + P_2) \end{aligned}$$

× La famille  $\mathcal{F}_3 = (P_0 + 2 \cdot P_1 + P_2)$  est :

- génératrice de  $E_3$ , d'après ce qui précède,
- libre, car elle est constituée uniquement d'un vecteur, qui est non nul

La famille  $\mathcal{F}_3 = (P_0 + 2 \cdot P_1 + P_2)$  est donc une base de  $E_3$  et :  
 $\dim(E_3) = \text{Card}(\mathcal{F}_3) = 1$

### Commentaire

On aurait également pu procéder par lecture matricielle.

- On sait que :
  - × l'espace vectoriel  $\mathbb{C}_2[X]$  est de dimension finie,
  - × l'application  $\varphi - 3 \cdot \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]}$  est linéaire, d'après 8,

D'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{C}_2[X]) &= \dim(\text{Ker}(\varphi - 3 \cdot \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]})) + \dim(\text{Im}(\varphi - 3 \cdot \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]})) \\ \parallel & \qquad \qquad \qquad \parallel \\ 3 & \qquad \qquad \qquad \text{rg}(\varphi - 3 \cdot \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]}) = \text{rg}(M - 3 \cdot I_3) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{rg}(M - 3 \cdot I_3) &= \text{rg} \left( \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow 3L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + L_1}}{=} \text{rg} \left( \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \right) \\ &= 2 \qquad \qquad \qquad (\text{car : } L_1 \text{ et } L_2 \text{ ne sont pas colinéaires}) \end{aligned}$$

On en déduit :  $\dim(E_3) = \dim(\text{Ker}(\varphi - 3 \cdot \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]})) = 3 - 2 = 1$ .

- De plus, on remarque :  $(P_0 + 2 \cdot P_1 + P_2) \in E_3$ . En effet :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}((\varphi - 3 \cdot \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]})(P_0 + 2 \cdot P_1 + P_2)) = (M - 3 \cdot I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(0_{\mathbb{C}_2[X]})$$

- La famille  $\mathcal{F}_3 = (P_0 + 2 \cdot P_1 + P_2)$  :
    - × est libre, car elle est constituée uniquement d'un vecteur, qui est non nul,
    - × vérifie :  $\text{Card}(\mathcal{F}_3) = 1 = \dim(E_3)$ .
- C'est donc une base de  $E_3$ . □

**11.** Démontrer :  $\mathbb{C}_2[X] = E_{-1} \oplus E_3$ .

*Démonstration.*

- Démontrons :  $E_{-1} \cap E_3 = \{0_{\mathbb{C}_2[X]}\}$ .

On procède par double inclusion.

( $\subset$ ) Soit  $P \in E_{-1} \cap E_3$ .

- × D'une part :  $P \in E_{-1}$ . Donc :  $\varphi(P) = -P$ .
- × D'autre part :  $P \in E_3$ . Donc :  $\varphi(P) = 3 \cdot P$ .

On en déduit :  $-P = 3 \cdot P$ . D'où :  $4 \cdot P = 0_{\mathbb{C}_2[X]}$ . Ainsi :  $P = 0_{\mathbb{C}_2[X]}$ .

Finalement :  $E_{-1} \cap E_3 \subset \{0_{\mathbb{C}_2[X]}\}$ .

( $\supset$ ) Les ensembles  $E_{-1}$  et  $E_3$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}_2[X]$ . Donc :

$$0_{\mathbb{C}_2[X]} \in E_{-1} \quad \text{et} \quad 0_{\mathbb{C}_2[X]} \in E_3$$

D'où :  $\{0_{\mathbb{C}_2[X]}\} \subset E_{-1} \cap E_3$ .

- On sait alors :

$$\times E_{-1} \cap E_3 = \{0_{\mathbb{C}_2[X]}\}$$

$$\times \dim(E_{-1}) + \dim(E_3) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{C}_2[X]), \text{ d'après la question précédente.}$$

On en déduit :  $\mathbb{C}_2[X] = E_{-1} \oplus E_3$ .

### Commentaire

On pouvait également trouver une base de  $\mathbb{C}_2[X]$  adaptée à la décomposition :

$$\mathbb{C}_2[X] = E_{-1} \oplus E_3$$

On note  $\mathcal{C} = (P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_0 + 2 \cdot P_1 + P_2)$ .

- Démontrons que la famille  $\mathcal{C}$  est libre.

Soit  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ .

Supposons :

$$\lambda \cdot (P_1 - P_0) + \mu \cdot (P_2 - P_0) + \nu \cdot (P_0 + 2 \cdot P_1 + P_2) = 0_{\mathbb{C}_2[X]} \quad (*)$$

On remarque :

$$\begin{aligned}
 (*) & \iff (-\lambda - \mu + \nu) \cdot P_0 + (\lambda + 2\nu) \cdot P_1 + (\mu + \nu) \cdot P_2 = 0_{\mathbb{C}_2[X]} \\
 & \iff \begin{cases} -\lambda - \mu + \nu = 0 \\ \lambda + 2\nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(car la famille} \\ (P_0, P_1, P_2) \text{ est libre)} \end{array} \\
 & \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} -\lambda - \mu + \nu = 0 \\ -\mu + 3\nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \end{cases} \\
 & \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} -\lambda - \mu + \nu = 0 \\ -\mu + 3\nu = 0 \\ 4\nu = 0 \end{cases} \\
 & \iff \{ \lambda = \mu = \nu = 0 \} \quad \begin{array}{l} \text{(par remontées} \\ \text{successives)} \end{array}
 \end{aligned}$$

Donc :  $\lambda = \mu = \nu = 0$ .

- La famille  $\mathcal{C}$  :

$\times$  est libre, d'après ce qui précède,

$\times$  vérifie :  $\text{Card}(\mathcal{C}) = 3 = \dim(\mathbb{C}_2[X])$ .

C'est donc une base de  $\mathbb{C}_2[X]$ .

- On a donc construit une base de  $\mathbb{C}_2[X]$  obtenue comme la concaténation d'une base de  $E_{-1}$  et d'une base de  $E_3$ . On en déduit :

$$\mathbb{C}_2[X] = E_{-1} \oplus E_3$$

□

12. Démontrer que la matrice  $M$  est semblable à la matrice  $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

*Démonstration.*

Comme 2 matrices représentant un même endomorphisme dans deux bases différentes sont semblables, on cherche à démontrer que  $N$  est la matrice représentative de  $\varphi$  dans une certaine base. Comme  $M$  est déjà la matrice représentative de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ , on pourra alors conclure que  $M$  et  $N$  sont semblable.

- Tout d'abord, on note :

$$T_0 = P_1 - P_0, \quad T_1 = P_2 - P_0, \quad T_2 = P_0 + 2 \cdot P_1 + P_2$$

On note alors  $\mathcal{C} = (T_0, T_1, T_2)$ .

On sait que, d'après 10 :

- × la famille  $(T_0, T_1)$  est une base de  $E_{-1}$ ,
- × la famille  $(T_2)$  est une base de  $E_3$ .

La famille  $\mathcal{C}$  est la concaténation de ces 2 bases.

De plus :  $\mathbb{C}_2[X] = E_{-1} \oplus E_3$ .

On en déduit que  $\mathcal{C} = (T_0, T_1, T_2)$  est une base de  $\mathbb{C}_2[X]$ .

- Déterminons la matrice représentative de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

- × Tout d'abord :  $\varphi(T_0) = -T_0$ . En effet :  $T_0 \in E_{-1}$ .

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(T_0)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- × Ensuite :  $\varphi(T_1) = -T_1$ . En effet :  $T_1 \in E_{-1}$ .

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(T_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- × Enfin :  $\varphi(T_2) = 3 \cdot T_2$ . En effet :  $T_2 \in E_3$ .

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(T_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = N$$

Les matrices  $M$  et  $N$  sont donc semblables, car elles représentent le même endomorphisme  $\varphi$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .

□

### Partie III - Étude d'un second exemple

- Dans cette partie uniquement, on suppose que  $n = 2$  et que  $B = X^3$ . Comme  $A$  est un élément de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}_2[X]$ , il existe  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$  tel que  $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ .

**13.** Montrer que la matrice de l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{C}_2[X]$  dans la base  $(1, X, X^2)$  est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

*Démonstration.*

- Tout d'abord :

$$\begin{cases} AP_0 = 0_{\mathbb{C}_2[X]} \times B + A \\ \deg(A) < \deg(B) \end{cases}$$

On en déduit que le polynôme  $A$  est le reste dans la division euclidienne de  $AP_0$  par  $B$ . Ainsi :  $\varphi(P_0) = A = \alpha \cdot P_0 + \beta \cdot P_1 + \gamma \cdot P_2$ . D'où :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(P_0)) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

- Ensuite :  $AP_1(X) = \alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3$ . Donc :

$$\begin{cases} AP_1(X) = \gamma B(X) + \beta X^2 + \alpha X \\ \deg(\beta X^2 + \alpha X) < \deg(B) \end{cases}$$

On en déduit que le polynôme  $\beta X^2 + \alpha X$  est le reste dans la division euclidienne de  $AP_1$  par  $B$ . Ainsi :  $\varphi(P_1) = \alpha \cdot P_1 + \beta \cdot P_2$ . D'où :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(P_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

- Enfin :  $AP_2(X) = \alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4$ . Donc :

$$\begin{cases} AP_2(X) = (\gamma X + \beta) \times B(X) + \alpha X^2 \\ \deg(\alpha X^2) < \deg(B) \end{cases}$$

On en déduit que le polynôme  $\alpha X^2$  est le reste dans la division euclidienne de  $AP_2$  par  $B$ . Ainsi :  $\varphi(P_2) = \alpha \cdot P_2$ . D'où :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

On en conclut :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} = T.$

□

14. Montrer que  $T$  est semblable à  $\alpha \cdot I_3$  si et seulement si le polynôme  $A$  est constant.

*Démonstration.*

On procède par double implication.

( $\Leftarrow$ ) Supposons que le polynôme  $A$  est constant. Démontrons que  $T$  est semblable à  $\alpha \cdot I_3$ .

× On sait que  $A$  est défini de la façon suivante :  $A(X) = \alpha + \beta \cdot X + \gamma \cdot X^2$ .

Comme le polynôme  $A$  est constant, alors :  $\beta = \gamma = 0$ .

× D'après la question précédente, on obtient :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot I_3$$

Comme la matrice  $T$  est égale à  $\alpha \cdot I_3$ , alors elle est semblable à  $\alpha \cdot I_3$  (par réflexivité de la relation de similitude).

( $\Rightarrow$ ) Supposons que la matrice  $T$  est semblable à  $\alpha \cdot I_3$ . Démontrons que le polynôme  $A$  est constant.

× Comme la matrice  $T$  est semblable à  $\alpha \cdot I_3$ , alors, par définition de la relation de similitude, il existe  $N \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$  tel que :  $T = N \times (\alpha \cdot I_3) \times N^{-1}$ .

× On en déduit :

$$\begin{aligned} T &= N \times (\alpha \cdot I_3) \times N^{-1} \\ &= \alpha \cdot N \times I_3 \times N^{-1} \\ &= \alpha \cdot N \times N^{-1} \\ &= \alpha \cdot I_3 \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} = T = \alpha \cdot I_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Par unicité des coefficients d'une matrice, on en déduit :  $\beta = \gamma = 0$ .

× On obtient alors :

$$A(X) = \alpha + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 = \alpha$$

Le polynôme  $A$  est donc constant.

On en conclut que la matrice  $T$  est semblable à  $\alpha \cdot I_3$  si et seulement si le polynôme  $A$  est constant.

□

## Partie IV - Étude du cas où $B$ est scindé à racines simples

- Dans cette partie, on ne suppose plus que  $n = 2$  : le nombre  $n$  est un entier quelconque de  $\mathbb{N}^*$ . Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que  $B$  est un polynôme scindé à racines simples. On note  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$  les racines de  $B$  qui sont donc des nombres complexes distincts.
- On définit les polynômes de Lagrange  $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$  associés aux points  $x_0, \dots, x_n$  par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$$

- En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

#### IV. 1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

**15.** Soit  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ . Montrer que  $x_0, \dots, x_n$  sont des racines du polynôme  $D = P - \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$ .

*Démonstration.*

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

$$\begin{aligned}
 D(x_k) &= P(x_k) - \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i(x_k) && (\text{par définition de } D) \\
 &= P(x_k) - \left( \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n P(x_i) L_i(x_k) + P(x_k) L_k(x_k) \right) \\
 &= P(x_k) - \left( \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n P(x_i) \times 0 + P(x_k) \times 1 \right) && (\text{d'après le résultat fourni par l'énoncé}) \\
 &= P(x_k) - P(x_k) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

On en déduit que  $x_0, \dots, x_n$  sont des racines du polynôme  $D$ .

□

**16.** Dédurre de la question précédente que pour tout  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ , on a  $P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$ .

*Démonstration.*

Soit  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ .

On note, comme dans la question précédente :  $D = P - \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$ .

- D'une part, d'après la question précédente, le polynôme  $D$  admet au moins  $n+1$  racines distinctes :  $x_0, \dots, x_n$ .
- D'autre part :  $\deg(D) \leq n$ . En effet :
  - ×  $\deg(P) \leq n$ ,
  - × pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$\deg(L_k) = \deg \left( \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i} \right) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \deg \left( \frac{X - x_i}{x_k - x_i} \right) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n 1 = (n+1) - 1 = n$$

$$\text{Donc : } \deg \left( \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i \right) \leq n.$$

Le polynôme  $D$  est donc un polynôme de degré au plus  $n$  admettant au moins  $n+1$  racines distinctes. On en déduit :  $D = 0_{\mathbb{C}_n[X]}$ .

Autrement dit :  $P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$ .

□

17. Montrer que  $(L_0, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

*Démonstration.*

- Démontrons que la famille  $(L_0, \dots, L_n)$  est génératrice de  $\mathbb{C}_n[X]$ . Autrement dit :  $\text{Vect}(L_0, \dots, L_n) \subset \mathbb{C}_n[X]$ .  
Soit  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ .

D'après la question précédente :  $P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$ . Ainsi :  $P \in \text{Vect}(L_0, \dots, L_n)$ .

La famille  $(L_0, \dots, L_n)$  est donc génératrice de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

- La famille  $(L_0, \dots, L_n)$  :  
  - × est génératrice de  $\mathbb{C}_n[X]$ , d'après ce qui précède,
  - × vérifie :  $\text{Card}((L_0, \dots, L_n)) = n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$ .

La famille  $(L_0, \dots, L_n)$  est donc une base de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

□

## IV. 2 - Réduction de l'endomorphisme $\varphi$

Pour tout entier  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on désigne respectivement par  $Q_k \in \mathbb{C}[X]$  et  $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$  le quotient et le reste dans la division euclidienne de  $AL_k$  par  $B$ .

18. Soit  $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ . Montrer que  $R_k(x_j) = 0$  si  $j \neq k$  et que  $R_k(x_k) = A(x_k)$ .

*Démonstration.*

Par définition de  $Q_k$  et  $R_k$  :

$$\begin{cases} AL_k = Q_k B + R_k \\ \deg(R_k) < \deg(B) \end{cases}$$

Deux cas se présentent.

- si  $j \neq k$ , alors :

$$\begin{aligned} R_k(x_j) &= A(x_j) \times L_k(x_j) - Q_k(x_j) \times B(x_j) \\ &= A(x_j) \times L_k(x_j) - \cancel{Q_k(x_j)} \times 0 && \text{(car } x_j \text{ est une racine de } B) \\ &= A(x_j) \times 0 && \text{(d'après l'énoncé, car : } k \neq j) \end{aligned}$$

Ainsi, si  $j \neq k$ , alors :  $R_k(x_j) = 0$ .

- si  $j = k$ , alors :

$$\begin{aligned} R_k(x_k) &= A(x_k) \times L_k(x_k) - Q_k(x_k) \times B(x_k) \\ &= A(x_k) \times L_k(x_k) - \cancel{Q_k(x_k)} \times 0 && \text{(car } x_k \text{ est une racine de } B) \\ &= A(x_k) \times 1 && \text{(d'après l'énoncé)} \end{aligned}$$

Ainsi :  $R_k(x_k) = A(x_k)$ .

□

19. En utilisant 16 en déduire pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  que  $\varphi(L_k) = A(x_k) L_k$ .

*Démonstration.*

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

- On sait :  $L_k \in \mathbb{C}_n[X]$ . Ainsi, d'après la question 7 :  $\varphi(L_k) \in \mathbb{C}_n[X]$ .  
On peut donc appliquer la question 16 au polynôme  $\varphi(L_k)$ . On obtient :

$$\varphi(L_k) = \sum_{i=0}^n \varphi(L_k)(x_i) L_i$$

- Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Déterminons alors  $\varphi(L_k)(x_i)$ .  
Avec les notations de la questions précédentes :

$$\begin{aligned} \varphi(L_k)(x_i) &= R_k(x_i) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ A(x_k) & \text{si } i = k \end{cases} \quad \begin{matrix} (d'après la question \\ précédente) \end{matrix} \end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned} \varphi(L_k) &= \sum_{i=0}^n \varphi(L_k)(x_i) L_i \\ &= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \varphi(L_k)(x_i) L_i + \varphi(L_k)(x_k) L_k \\ &= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n 0 \cdot L_i + A(x_k) \cdot L_k \\ &= A(x_k) \cdot L_k \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi(L_k) = A(x_k) \cdot L_k}$$

□

20. Démontrer que la matrice représentative de  $\varphi$  dans la base  $(L_0, \dots, L_n)$  est diagonale et préciser ses coefficients diagonaux.

*Démonstration.*

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

D'après la question précédente :  $\varphi(L_k) = A(x_k) \cdot L_k$ . Ainsi :

$$\text{Mat}_{(L_0, \dots, L_n)}(\varphi(L_k)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A(x_k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — } k^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Mat}_{(L_0, \dots, L_n)}(\varphi) = \begin{pmatrix} A(x_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A(x_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & A(x_{n-1}) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A(x_n) \end{pmatrix} .}$$

□

## Exercice 4

### Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$  et  $v_n = u_n - \frac{1}{n}$ .

21. On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$ .

a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

*Démonstration.*

• D'une part :

$$\times \frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1,$$

$$\times \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty,$$

$$\times \ln(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln(1) = 0$$

On en déduit :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ .

• D'autre part :

$$\ln(x) - \ln(x+1) = -(\ln(x+1) - \ln(x))$$

$$= -\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$= -\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\ln(1) = 0 \quad (\text{par continuité de } \ln \text{ en } 1)$$

De plus :  $\frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

On en conclut :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

□

b) Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et dresser son tableau de variations.

*Démonstration.*

- La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  comme somme de fonctions dérivables sur  $]0, +\infty[$ .
- Soit  $x \in ]0, +\infty[$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{-x + (x^2 + 2x + 1) - x^2 - x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{x(x+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

$\forall x \in ]0, +\infty[, f'(x) > 0$ .

- On obtient le tableau de variations suivant.

|                   |   |                                                                                    |
|-------------------|---|------------------------------------------------------------------------------------|
| $x$               | 0 | $+\infty$                                                                          |
| Signe de $f'(x)$  |   | +                                                                                  |
| Variations de $f$ |   |  |

□

- c) Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = f(n)$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \left( \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) - \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \\
 &= \left( \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n+1) + \ln(n) \\
 &= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1)
 \end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = f(n)$

□

- d) En déduire la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- D'après l'étude en question **21b**, la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  et de limite nulle en  $+\infty$ . On en déduit :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x) < 0$$

- En appliquant cette propriété en  $x = n > 0$ , on obtient, d'après la question précédente :

$$u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$$

On en conclut que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est (strictement) décroissante.

□

- e) On suppose avoir importé la bibliothèque `numpy` sous l'alias `np`. Écrire une fonction **Python** d'en-tête : `def suite_u(n)` qui prend en argument un entier naturel  $n$  non nul et qui renvoie la valeur de  $u_n$ .

*Démonstration.*

```

1  def suite_u(n) :
2      'suite_u(n : int) -> float'
3      S = 0
4      for k in range(1, n+1) :
5          S = S + 1/k
6      return S - np.log(n)

```

Détaillons les différents éléments de cette fonction :

• **Début de la fonction**

On commence par préciser la structure de la fonction :

- × cette fonction se nomme `suite_u`,
- × elle prend en entrée le paramètre entier `n`,
- × elle renvoie un réel (un flottant).

```
1 def suite_u(n) :  
2     'suite_u(n : int) -> float'
```

```
6     return S - np.log(n)
```

En ligne 3, on initialise la variable `S` dont le but est de contenir en fin de programme  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , à 0 (valeur d'initialisation naturelle car il s'agit de l'élément neutre pour la somme).

```
3     S = 0
```

• **Struture itérative**

Les lignes 4 à 5 consistent à mettre à jour la variable `S` pour qu'elle contienne  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

```
4     for k in range(1, n+1) :  
5         S = S + 1/k
```

• **Fin de la fonction**

À l'issue de la boucle `for`, la variable `S` contient  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Il reste donc à lui retrancher  $\ln(n)$  pour obtenir la valeur de  $u_n$ , puis renvoyer la valeur obtenue.

```
6     return S - np.log(n)
```

**Commentaire**

Pour le calcul de la somme  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , on peut aussi tirer profit des fonctionnalités **Python** :

```
3     S = sum([ 1/k for k in range(1, n+1)])
```

Pour bien comprendre cette instruction, rappelons que :

- × l'instruction `[ 1/k for k in range(1, n+1)]` permet de créer la liste  $[1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}]$ .
- × la fonction `sum` permet de sommer tous les éléments d'une liste.

□

22. a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par définition de  $v_n$  et  $v_{n+1}$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n - \frac{1}{n}\right) \\ &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1)\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (\text{d'après la question 21c}) \\ &= \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

□

b) Montrer que pour tout réel  $x$  positif :  $\ln(1+x) \leq x$ .

En déduire que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.

*Démonstration.*

- La fonction  $g : x \mapsto \ln(x)$  est concave.

On en déduit que sa courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  se situe sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= g(1) + g'(1)(x-1) \\ &= \ln(1) + \frac{1}{1}(x-1) = x-1 \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \ln(x) \leq x-1$$

Soit  $t \geq 0$ . En appliquant la propriété ci-dessus à  $x = 1+t \in ]0, +\infty[$ , on obtient :

$$\ln(1+t) \leq (1+t) - 1 = t$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall t \geq 0, \ln(1+t) \leq t.}$$

### Commentaire

- Notons tout d'abord que la variable  $t$  étant sous la portée d'un quantificateur, elle est muette. Ainsi, le résultat démontré est bien celui souhaité.
- Il est possible de procéder différemment.  
On peut par exemple considérer la fonction  $g_1 : x \mapsto \ln(1+x)$  et démontrer qu'elle est concave. Ainsi, la courbe  $\mathcal{C}_{g_1}$  est située sous sa tangente au point d'abscisse 0 :

$$\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq g_1(0) + g_1'(0)(x-0) = \ln(1) + x = x$$

- On peut aussi considérer la fonction  $g_2 : x \mapsto x - \ln(1+x)$ , procéder à son étude et conclure quant à son signe :

$$\forall x \geq 0, g_2(x) \geq 0$$

ce qui correspond à l'inégalité souhaitée.

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En appliquant l'inégalité précédente à  $t = \frac{1}{n} \geq 0$ , on obtient :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et ainsi} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$$

On en déduit que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.

□

c) Donner le développement limité d'ordre 2 de  $\ln(1+x)$  en 0. En déduire que :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

*Démonstration.*

- On sait :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

- De plus :  $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$v_n - v_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi :  $v_n - v_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$ .

On en déduit :  $v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ .

□

d) Déterminer la nature de la série de terme général  $v_{n+1} - v_n$ . On note  $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$ .

*Démonstration.*

D'après ce qui précède :

$$\times v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} \geq 0.$$

$\times$  la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann d'exposant 2 ( $2 > 1$ ). Elle est donc convergente.

Par le critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$  est convergente.

### Commentaire

La seule difficulté de cette démonstration réside dans la rédaction du critère des séries à termes positifs (les arguments à utiliser ont tous été démontrés dans les questions précédentes). C'est donc une question d'application directe du cours qu'il convient de savoir traiter. □

e) Pour  $n \geq 2$ , simplifier la somme partielle :  $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$ .

En déduire que la suite  $(v_n)_{n \geq 2}$  converge vers  $\gamma$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \geq 2$ .

- Par sommation télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_{(n-1)+1} - v_1 = v_n - v_1$$

On en déduit :  $v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$ .

- Or, d'après la question précédente, la série  $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$  est convergente.

On déduit du point précédent que la suite  $(v_n)$  est convergente. De plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = v_1 + \gamma$$

- Enfin :

$$v_1 = u_1 - \frac{1}{1} = \left( \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} - \ln(1) \right) - 1 = 1 - 1 = 0$$

Ainsi, la suite  $(v_n)$  est convergente, de limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \gamma$ . □

23. a) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Par définition de  $v_n$  :  $u_n = v_n + \frac{1}{n}$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente car elle est la somme de suites convergentes.

$$\text{De plus : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \gamma + 0 = \gamma.$$

### Commentaire

- Il n'y a pas forcément dans les sujets une croissance linéaire de la difficulté. Au contraire, chaque nouvelle partie commence généralement par une question plus simple de mise en route. Il n'est donc pas judicieux de laisser de côté certaines parties.
- Cette question **23a** ne présente pas de difficulté. Comme dans la question **22d**, on est confronté ici à une question bilan qui consiste simplement à rappeler puis utiliser certains résultats précédents. Ces résultats étant fournis par l'énoncé, cette question peut être traitée même si les questions précédentes ne l'ont pas été. □

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \gamma \leq u_n$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$$

*Démonstration.*

- La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est :
  - × croissante d'après **22c**,
  - × convergente de limite  $\gamma$ , d'après **22e**.

Par théorème de convergence monotone :  $\gamma = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (v_n)$ .

On en déduit :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \gamma$ .

- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est :
  - × croissante d'après **21d**,
  - × convergente de limite  $\gamma$ , d'après la question précédente.

Par théorème de convergence monotone :  $\gamma = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} (u_n)$ .

On en déduit :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \gamma$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après l'inégalité précédente :  $u_n - \gamma \geq 0$ . On en déduit :

$$|u_n - \gamma| = u_n - \gamma$$

Or, par définition de la suite  $v_n$  :

$$\begin{aligned} u_n - \gamma &= v_n + \frac{1}{n} - \gamma \\ &= (v_n - \gamma) + \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{n} \quad \text{(car, d'après le point précédent : } v_n - \gamma \leq 0) \end{aligned}$$

On en déduit :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$

□

## Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$ .

24. Démontrer que la série de terme général  $a_n$  converge.

*Démonstration.*

On remarque :

$$\times a_n = \frac{1}{n(2n-1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} \geq 0.$$

$\times$  La série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann d'exposant 2 ( $2 > 1$ ).

Elle est donc convergente

Par le critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série  $\sum a_n$  est convergente.

□

25. a) Justifier que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{\substack{k \in [1, 2n] \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k \in [1, 2n] \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) + \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}.$$

### Commentaire

- L'énoncé demande de « Justifier » le résultat. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes et éventuellement moins formelles.
- Il est aussi possible ici de procéder par récurrence. Détaillons la rédaction.

Démontrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$  où  $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$ .

► **Initialisation :**

– D'une part :  $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1.$

– D'autre part :  $\sum_{k=1}^2 \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{2k} = \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = 1.$

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

**Commentaire**

► **Hérédité** : soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$  (i.e.  $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k}$ ).

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} &= \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \right) + \frac{1}{2(n+1)-1} \\ &= \left( \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) + \frac{1}{2n+1} && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \\ &= \left( \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+2} \right) - \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} + \frac{1}{2n+2} \right) && \text{(en introduisant } \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+2} \text{)} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k} \end{aligned}$$

D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Ainsi, par principe de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ .

□

b) Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par décomposition en éléments simples :

$$a_n = \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{-1}{n} + \frac{2}{2n-1}$$

Les réels  $\alpha = -1$  et  $\beta = 2$  conviennent.

**Commentaire**

Détaillons la décomposition en éléments simples.

- On cherche des réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}, \quad \frac{1}{x(2x-1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{2x-1}$$

- Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$ .

× D'une part :

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2x-1} & = & \alpha & + & \beta \frac{x}{2x-1} \\ \circ \downarrow & & \circ \downarrow & & \circ \downarrow \\ -1 & = & \alpha & + & 0 \end{array}$$

**Commentaire**

× D'autre part :

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{x} & = & \alpha \frac{2x-1}{x} & + & \beta \\ \downarrow \scriptstyle \mathbb{N} \downarrow & & \downarrow \scriptstyle \mathbb{N} \downarrow & & \downarrow \scriptstyle \mathbb{N} \downarrow \\ 2 & = & 0 & + & \beta \end{array}$$

On obtient bien :  $\alpha = -1$  et  $\beta = 2$ . □

c) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- D'après la question précédente, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$a_k = -\frac{1}{k} + \frac{2}{2k-1}$$

- En sommant ces égalités pour  $k$  variant de 1 à  $n$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \left( -\frac{1}{k} + \frac{2}{2k-1} \right) \\ &= -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} && \text{(par linéarité de la somme)} \\ &= -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 2 \left( \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) && \text{(d'après 25a)} \\ &= -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= 2 \left( \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \\ &= 2 \left( \left( \sum_{k=1}^n \cancel{\frac{1}{k}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right) - \sum_{k=1}^n \cancel{\frac{1}{k}} \right) \\ &= 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

□

26. a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est la suite définie dans la partie I.

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n &= \left( \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) \right) - \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \quad (\text{par définition de } u_{2n} \text{ et } u_n) \\ &= \left( \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - (\ln(2n) - \ln(n)) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - ((\ln(2) + \cancel{\ln(n)}) - \cancel{\ln(n)}) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2) \end{aligned}$$

On en déduit :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2).$

□

b) Calculer alors  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ .

*Démonstration.*

- D'après la question 24, la série  $\sum a_n$  est convergente.
- De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} && (\text{d'après la question 25c}) \\ &= 2 (u_{2n} - u_n + \ln(2)) && (\text{d'après la question précédente}) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 (\cancel{\gamma} - \cancel{\gamma} + \ln(2)) && (\text{car comme la suite } (u_n) \text{ converge vers } \gamma, \text{ il en est de même de sa sous-suite } (u_{2n})) \end{aligned}$$

On en conclut :  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2 \ln(2).$

□

27. a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} && (\text{par décalage d'indice}) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n \left( \frac{k}{n} + 1 \right)} \end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$

□

b) Retrouver alors le résultat de la question **23b**.

*Démonstration.*

- D'après la question précédente :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$

- On reconnaît une somme de Riemann.

La fonction  $f$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ . On en déduit :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \, dx$$

Or :

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx = [\ln(|1+x|)]_0^1 = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1)$$

- Ainsi, d'après la question **25c** :

$$\sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \ln(2)$$

On retrouve bien :  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2 \ln(2)$

□