

DS8 /85



On traitera **OBLIGATOIREMENT** l'exercice de cours. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours /8

1. (*) Donner la caractérisation matricielle des projecteurs, puis des symétries.

• 1 pt :

Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$p \text{ est un projecteur de } E \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array} \right) \text{ où } n_1 = \dim(\text{Ker}(p - \text{id}_E))$$

• 1 pt :

Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$s \text{ est une symétrie de } E \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & (0) \\ \hline (0) & -I_{n_2} \end{array} \right) \text{ où } \begin{cases} n_1 = \dim(\text{Ker}(s - \text{id}_E)) \\ n_2 = \dim(\text{Ker}(s + \text{id}_E)) \end{cases}$$

2. (*) On joue avec une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0, 1[$, en effectuant des lancers mutuellement indépendants. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers de cette pièce. On note $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé associé à cette expérience. On note X la variable aléatoire réelle égale au rang du premier pile. Notons qu'il est possible de ne jamais obtenir pile au cours des n lancers. Dans ce cas, la variable aléatoire X prend la valeur $n + 1$.

Déterminer la loi de X .

• 1 pt : $X(\Omega) \subset \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$

• 3 pts : si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

× 1 pt : $\{X = k\} = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i \right) \cap P_k$

× 1 pt : indépendance mutuelle

× 1 pt : $\mathbb{P}(\{X = k\}) = (1 - p)^{k-1} p$

• 2 pts : si $k = n + 1$

× 1 pt : $(\{X = k\})_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ SCE

× 1 pt : $\mathbb{P}(\{X = n + 1\}) = (1 - p)^n$

Exercice 2 /15

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par P_n l'événement « Pile apparaît au $n^{\text{ème}}$ lancer » et par F_n l'événement « Face apparaît au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On note :

$$\forall n \geq 3, B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \text{ et } U_n = \bigcup_{i=3}^n B_i$$

On pose enfin $u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \geq 3$, $u_n = \mathbb{P}(U_n)$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est monotone et convergente.

- 1 pt : (u_n) croissante car...
- 1 pt : théorème de convergence monotone

4. a) Pour tout $n \geq 3$, calculer $\mathbb{P}(B_n)$.

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{8}$, car...

b) Montrer que, pour tout $n \geq 3$, les événements B_n , B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

- 1 pt

c) Calculer les valeurs de u_3 , u_4 et u_5 .

- 1 pt : $u_3 = \frac{1}{8}$
- 1 pt : $u_4 = \frac{1}{4}$
- 1 pt : $u_5 = \frac{3}{8}$

5. Dans cette question, on suppose $n \geq 5$.

a) Comparer les événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Préciser leurs probabilités respectives.

- 1 pt : $U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$
- 1 pt : U_{n-2} et B_{n+1} indépendants, car...
- 1 pt : $\mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = \frac{1}{8} u_{n-2}$

b) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

- 1 pt

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

- 1 pt : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Trouver $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3}$.

- 1 pt : $\beta = 8$ et $\gamma = -8$

b) Montrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

- 1 pt : $\sum_{k=0}^n v_k = 8 (u_{n+3} - u_2)$
- 1 pt : $\sum v_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 8$

Exercice 3 : Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes /32

Présentation générale

- On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V))$$

- Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V .
- Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n+1$. **On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B .**

Partie I- Généralités sur l'application φ

- Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

7. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

- 1 pt :** $\varphi(P)$ reste de la div. eucl. de AP par B ($\neq 0$) donc $\deg(\varphi(P)) < \deg(B) = n+1$

- On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2$$

8. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse.

En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

- 1 pt :** $A(\lambda P_2) = B(\lambda Q_2) + \lambda R_2$ et $A(P_1 + \lambda P_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + (R_1 + \lambda R_2)$
- 1 pt :** $\deg(R_1 + \lambda R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(\lambda R_2)) < \deg(B) = n+1$
- 1 pt :** par unicité de la division euclidienne, $\varphi(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = \varphi(P_1) + \lambda \varphi(P_2)$

Partie II - Étude d'un premier exemple

- Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1$$

9. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

- 1 pt :** $A P_0(X) = X^2 + 2X = (X^3 + X^2 - X - 1) \times 0 + (X^2 + 2X)$
- 1 pt :** $A P_1(X) = X^3 + 2X^2 = (X^3 + X^2 - X - 1) \times 1 + (X^2 + X + 1)$
- 1 pt :** $A P_2(X) = X^4 + 2X^3 = (X^3 + X^2 - X - 1) \times (X - 1) + (2X + 1)$

10. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note :

$$E_\lambda = \text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]})$$

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels E_{-1} et E_3 .

• 2 pts : peu importe la méthode

× 1 pt : $E_{-1} = \text{Vect}(-P_0 + P_1, -P_0 + P_2)$

× 1 pt : $(-P_0 + P_1, -P_0 + P_2)$ base de E_{-1}

• 2 pts : peu importe la méthode

× 1 pt : $E_3 = \text{Vect}(P_0 + 2P_1 + P_2)$

× 1 pt : $(P_0 + 2P_1 + P_2)$ base de E_3

11. Démontrer : $\mathbb{C}_2[X] = E_{-1} \oplus E_3$.

• 1 pt : $E_{-1} \cap E_3 = \{0_{\mathbb{C}_2[X]}\}$

• 1 pt : $\dim(E_{-1}) + \dim(E_3) = \dim(\mathbb{C}_2[X])$

12. Démontrer que la matrice M est semblable à la matrice $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

• 1 pt : $\mathcal{C} = (P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_0 + 2P_1 + P_2)$ base de $\mathbb{C}_2[X]$

• 1 pt : $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = N$

• 1 pt : les matrices M et N représentent le même endomorphisme φ dans deux bases différentes, elles sont donc semblables

Partie III - Étude d'un second exemple

• Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

13. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

• 1 pt : $A \cdot P_0(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2 = X^3 \times 0 + (\alpha + \beta X + \gamma X^2)$

• 1 pt : $A \cdot P_1(X) = \alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3 = X^3 \times \gamma + (\alpha X + \beta X^2)$

• 1 pt : $A \cdot P_2(X) = \alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4 = X^3 \times (\gamma X + \beta) + (\alpha X^2)$

14. Montrer que T est semblable à $\alpha \cdot I_3$ si et seulement si le polynôme A est constant.

• 1 pt : si A constant, alors $T = \alpha \cdot I_3$. Donc T semblable à $\alpha \cdot I_3$

• 2 pts :

× 1 pt : si T semblable à $\alpha \cdot I_3$, alors : $T = \alpha \cdot I_3$

× 1 pt : par unicité des coefficients d'une matrice, A est constant

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

- Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.
- On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \dots, x_n$ par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$$

- En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

IV. 1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

15. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \dots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$.

- **1 pt** : si $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $D(x_j) = P(x_j) - \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i(x_j) = P(x_j) - \sum_{i=0}^n P(x_i) \delta_{i,j} = P(x_j) - P(x_j) = 0$

16. Dédurre de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$.

- **1 pt** : le polynôme D est de degré au plus n (comme somme de tels polynômes)
- **1 pt** : d'après la question précédente, D admet $n+1 > n$ racines distinctes et est donc le polynôme nul

17. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

- **1 pt** : d'après **16**, la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$
- **1 pt** : de plus, $\text{Card}(L_0, \dots, L_n) = n+1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$

IV. 2 - Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B .

18. Soit $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

- **1 pt** : $AL_k = BQ_k + R_k$ ainsi $A(x_j)L_k(x_j) = (BQ_k + R_k)(x_j) = B(x_j)Q_k(x_j) + R_k(x_j) = R_k(x_j)$
- **1 pt** : $A(x_j)L_k(x_j) = A(x_j)\delta_{k,j} = \begin{cases} A(x_k) & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$

19. En utilisant **18** en déduire pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$.

- **1 pt** : par **16**, $\varphi(L_k) = \sum_{i=0}^n \left(\varphi(L_k)(x_i) \right) L_i$
- **1 pt** : $\dots = \sum_{i=0}^n R_k(x_i) L_i = \sum_{i=0}^n A(x_i) \delta_{k,i} L_i = A(x_k) L_k$

20. Démontrer que la matrice représentative de φ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ est diagonale et préciser ses coefficients diagonaux.

$$\bullet \text{ 1 pt : } \text{Mat}_{(L_0, \dots, L_n)}(\varphi) = \begin{pmatrix} A(x_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A(x_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & A(x_{n-1}) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A(x_n) \end{pmatrix}$$

Exercice 4 /30

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

21. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.

- 1 pt : f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f' : x \mapsto \frac{1}{x(x+1)^2} > 0$
- 1 pt : TV

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de f		

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = f(n)$.

- 1 pt

d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- 1 pt : D'après l'étude en question ??, la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$. On en déduit : $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) < 0$
- 1 pt : En appliquant cette propriété en $x = n > 0$, on en déduit que la suite (u_n) est (strictement) décroissante

e) On suppose avoir importé la bibliothèque `numpy` sous l'alias `np`. Écrire une fonction **Python** d'en-tête : `def suite_u(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n .

- 2 pts

```

1  def suite_u(n) :
2      'suite_u(n : int) -> float'
3      S = 0
4      for k in range(1, n+1) :
5          S = S + 1/k
6      return S - np.log(n)

```

22. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

- 1 pt : utilisation de la définition de v_n et v_{n+1} , ainsi que 21c

- b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leq x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

• 1 pt : utilisation de la concavité de $\ln$

• 1 pt : en appliquant l'inégalité précédente à $t = \frac{1}{n} \geq 0$

- c) Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

• 1 pt : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$

• 1 pt : $v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$

- d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

• 1 pt : critère de comparaison par équivalence des SATP

- e) Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.

En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ converge vers γ .

• 1 pt : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1$

• 1 pt : comme $\sum (v_{n+1} - v_n)$ est convergente (question précédente), alors (v_n) est convergente et : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \gamma$

23. a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

• 1 pt : (u_n) convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \gamma$

- b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \gamma \leq u_n$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$$

• 1 pt : par théorème de convergence monotone : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \gamma$

• 0 pt : par théorème de convergence monotone : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \gamma$

• 1 pt : $|u_n - \gamma| = u_n - \gamma = (v_n - \gamma) + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$.

24. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

- 1 pt : critère de comparaison par équivalence des SATP

25. a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$.

- 1 pt : découpage de la somme en la somme sur les termes d'indice pair et celle sur les termes d'indice impair

b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}$.

- 1 pt : $\alpha = -1$ et $\beta = 2$

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

- 1 pt : utilisation de la question précédente et 25a

26. a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

- 1 pt

b) Calculer alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

- 1 pt : $\sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = 2(u_{2n} - u_n + \ln(2))$

- 1 pt : $u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma$ car (u_{2n}) est une sous-suite de (u_n) qui converge vers γ . Donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2 \ln(2)$$

27. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$.

- 1 pt

b) Retrouver alors le résultat de la question 23b.

- 1 pt : $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur le segment $[0, 1]$

- 1 pt : $\int_0^1 f(t) dt = \ln(2)$