

DS8



On traitera **OBLIGATOIREMENT** l'exercice de cours. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. (*) Donner la caractérisation matricielle des projecteurs, puis des symétries.
2. (*) On joue avec une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0, 1[$, en effectuant des lancers mutuellement indépendants. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers de cette pièce. On note $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé associé à cette expérience. On note X la variable aléatoire réelle égale au rang du premier pile. Notons qu'il est possible de ne jamais obtenir pile au cours des n lancers. Dans ce cas, la variable aléatoire X prend la valeur $n + 1$.
Déterminer la loi de X .

Exercice 2

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par P_n l'événement « Pile apparaît au $n^{\text{ème}}$ lancer » et par F_n l'événement « Face apparaît au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On note :

$$\forall n \geq 3, B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \text{ et } U_n = \bigcup_{i=3}^n B_i$$

On pose enfin $u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \geq 3$, $u_n = \mathbb{P}(U_n)$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est monotone et convergente.
4. a) Pour tout $n \geq 3$, calculer $\mathbb{P}(B_n)$.
b) Montrer que, pour tout $n \geq 3$, les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.
c) Calculer les valeurs de u_3, u_4 et u_5 .
5. Dans cette question, on suppose $n \geq 5$.
a) Comparer les événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Préciser leurs probabilités respectives.
b) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
d) Calculer $\mathbb{P}(D)$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.
a) Trouver $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3}$.
b) Montrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Exercice 3 : Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

Présentation générale

- On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V))$$

- Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V .
- Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n+1$. **On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B .**
- Par exemple, si l'on suppose :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B , on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X,$$

et donc : $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie I- Généralités sur l'application φ

- Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
- 7. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.
- On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2$$

- 8. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse.
En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II - Étude d'un premier exemple

- Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1$$

- 9. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

- 10. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note :

$$E_\lambda = \text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{C}_2[X]})$$

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels E_{-1} et E_3 .

- 11. Démontrer : $\mathbb{C}_2[X] = E_{-1} \oplus E_3$.

- 12. Démontrer que la matrice M est semblable à la matrice $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie III - Étude d'un second exemple

- Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

13. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

14. Montrer que T est semblable à $\alpha \cdot I_3$ si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

- Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.
- On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \dots, x_n$ par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$$

- En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

IV. 1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

15. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \dots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$.

16. Dédurre de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$.

17. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

IV. 2 - Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B .

18. Soit $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

19. En utilisant **16** en déduire pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $\varphi(L_k) = A(x_k) L_k$.

20. Démontrer que la matrice représentative de φ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ est diagonale et préciser ses coefficients diagonaux.

Exercice 4

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

21. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = f(n)$.

d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

e) On suppose avoir importé la bibliothèque `numpy` sous l'alias `np`. Écrire une fonction **Python** d'en-tête : `def suite_u(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n .

22. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leq x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

c) Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

e) Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ converge vers γ .

23. a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \gamma \leq u_n$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$$

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$.

24. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

25. a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$.

b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}$.

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

26. a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

b) Calculer alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

27. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$.

b) Retrouver alors le résultat de la question 23b.