

DS7



On traitera **OBLIGATOIREMENT** l'exercice de cours. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice : Cours

1. (*) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

Démontrer :

$$p \circ p = p \quad \Rightarrow \quad E = \text{Ker}(p - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(p)$$

Démonstration.

Supposons : $p \circ p = p$. Démontrons : $E = \text{Ker}(p - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(p)$.

Soit $x \in E$.

On procède par analyse-synthèse.

• **Analyse.**

Supposons qu'il existe $(u, v) \in E^2$ tel que :

a) $u \in \text{Ker}(p - \text{id}_E)$, i.e. : $(p - \text{id}_E)(u) = 0_E$. Autrement dit : $p(u) - u = 0_E$. D'où : $p(u) = u$.

b) $v \in \text{Ker}(p)$, i.e. : $p(v) = 0_E$.

c) $x = u + v$

On remarque :

$$\begin{aligned} p(x) &= p(u + v) && (d'après \textbf{c}) \\ &= p(u) + p(v) && (par \text{ linéarité de } p) \\ &= u + 0_E && (d'après \textbf{a}) \text{ et } \textbf{b}) \\ &= u \end{aligned}$$

On en déduit, d'après **c)** :

$$v = x - u = x - p(x)$$

• **Synthèse.**

On note :

$$u_0 = p(x) \quad \text{et} \quad v_0 = x - p(x)$$

a) Démontrons : $u_0 \in \text{Ker}(p - \text{id}_E)$.

$$\begin{aligned} (p - \text{id}_E)(u_0) &= p(u_0) - u_0 && (par \text{ linéarité de } \\ &&& \text{l'évaluation en } v_0) \\ &= p(p(x)) - p(x) && (par \text{ définition de } u_0) \\ &= (p \circ p)(x) - p(x) \\ &= p(x) - p(x) && (car : p \circ p = p) \\ &= 0_E \end{aligned}$$

b) Démontrons : $v_0 \in \text{Ker}(p)$.

$$\begin{aligned}
 p(v_0) &= p(x - p(x)) && (\text{par définition de } v_0) \\
 &= p(x) - p(p(x)) && (\text{par linéarité de } p) \\
 &= p(x) - (p \circ p)(x) \\
 &= p(x) - p(x) && (\text{car : } p \circ p = p) \\
 &= 0_E
 \end{aligned}$$

c) Démontrons : $u_0 + v_0 = x$.

$$\begin{aligned}
 u_0 + v_0 &= \cancel{p(x)} + (x - \cancel{p(x)}) && (\text{par définition de } u_0 \text{ et } v_0) \\
 &= x
 \end{aligned}$$

Finalement, tout vecteur de E se décompose de manière unique comme la somme d'un vecteur de $\text{Ker}(p - \text{id}_E)$ et d'un vecteur de $\text{Ker}(p)$. Ainsi : $E = \text{Ker}(p - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(p)$.

On en conclut : $p \circ p = p \Rightarrow E = \text{Ker}(p - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(p)$.

□

2. (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère l'expérience qui consiste à tirer sans remise dans une urne contenant n boules blanches et 2 boules noires.

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket^2$, on note :

$A_{i,j}$: « obtenir la 1^{ère} boule noire au $i^{\text{ème}}$ tirage et la 2^{ème} au $j^{\text{ème}}$ tirage »

Déterminer $\mathbb{P}(A_{i,j})$.

Démonstration.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket^2$. Deux cas se présentent.

- si $i \geq j$, alors : $A_{i,j} = \emptyset$. En effet, on ne peut obtenir la 1^{ère} boule noire après la 2^{ème}. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_{i,j}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

- si $i < j$, alors un $(n+2)$ -tirage réalisant l'événement $A_{i,j}$ est entièrement déterminé par :
 - × le numéro de la boule noire obtenue au $i^{\text{ème}}$ tirage : 2 possibilités,
 - × la position des n boules blanches sur les n positions restantes (les positions i et j sont occupées par des boules noires) : $n!$ possibilités.

On est de plus en situation d'équiprobabilité. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_{i,j}) = \frac{\text{Card}(A_{i,j})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2n!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

Finalement : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket^2, \mathbb{P}(A_{i,j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ \frac{2}{(n+2)(n+1)} & \text{si } i < j \end{cases}$

□

Problème I (E3A 2020 PSI)

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout λ réel, on pose $I(\lambda) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$, lorsque cela existe. On note alors :

$$I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$$

On rappelle que, si une fonction f est prolongeable par continuité sur le segment $[a, b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est bien définie.

Enfin, on pourra utiliser les résultats suivants sans démonstration.

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

- Résultat 1 : Supposons qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$\times \forall t \in [a, +\infty[, |f(t)| \geq 0 \text{ et } \frac{1}{t^\alpha} \geq 0$$

$$\times |f(t)| = O_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^\alpha} \right).$$

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$ existe.

- Résultat 2 : Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\times f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{t^\alpha} \geq 0.$$

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$ existe **si et seulement si** : $\alpha > 1$.

3. **Dans cette question, et uniquement cette question**, f est la fonction $t \mapsto \cos\left(\frac{t}{1+t^2}\right)$.

- a) En utilisant un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, donner un équivalent de $\lambda - f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

Démonstration.

On rappelle :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Or : $\frac{t}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi :

$$\cos\left(\frac{t}{1+t^2}\right) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2 + o_{t \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2 \right)$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \lambda - f(t) &= \lambda - \left(1 - \frac{t^2}{2(1+t^2)^2} + o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^2}{(1+t^2)^2} \right) \right) \\ &= \lambda - 1 + \frac{t^2}{2(1+t^2)^2} + o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^2}{(1+t^2)^2} \right) \end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors :

× si $\lambda \neq 1$, alors :

$$\lambda - f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda - 1$$

× si $\lambda = 1$, alors :

$$\lambda - f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^2}{2(1+t^2)^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^2}{2t^4} = \frac{1}{2t^2}$$

Finalement : $\lambda - f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} \lambda - 1 & \text{si } \lambda \neq 1 \\ \frac{1}{2t^2} & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$

□

b) En déduire l'ensemble des valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord, pour tout $b \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\lambda - f(t)}{t}$ est continue sur le segment $[a, b]$.

L'intégrale $\int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ est donc bien définie.

- Trois cas se présentent ensuite.

× Si : $\lambda > 1$, alors :

$$\blacktriangleright \frac{\lambda - f(t)}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda - 1}{t} \geq 0 \text{ (d'après la question précédente)}$$

D'après le *Résultat 2*, on en déduit que $I(\lambda)$ n'existe pas.

× Si : $\lambda < 1$, alors :

$$\blacktriangleright -\frac{\lambda - f(t)}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\lambda - 1}{t} = \frac{1 - \lambda}{t} \geq 0 \text{ (d'après la question précédente)}$$

D'après le *Résultat 2*, on en déduit que $-I(\lambda)$ n'existe pas, et donc $I(\lambda)$ non plus.

× Si : $\lambda = 1$, alors :

$$\blacktriangleright \frac{1 - f(t)}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2t^2}}{t} = \frac{1}{2t^3} \geq 0 \text{ (d'après la question précédente)}$$

D'après le *Résultat 2*, on en déduit que $I(1)$ existe.

Finalement, l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe est : $\{1\}$.

□

c) Donner alors un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ lorsque x tend vers l'infini.

Démonstration.

- Soit $x \in [a, +\infty[$.

La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est continue sur le SEGMENT $[a, x]$.

L'intégrale $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ est donc bien définie.

- De plus :

$$\begin{aligned}
 \int_a^x \frac{f(t)}{t} dt &= \int_a^x \frac{f(t) - 1 + 1}{t} dt \\
 &= \int_a^x \frac{f(t) - 1}{t} dt + \int_a^x \frac{1}{t} dt \\
 &= - \int_a^x \frac{1 - f(t)}{t} dt + \int_a^x \frac{1}{t} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\
 &= - \int_a^x \frac{1 - f(t)}{t} dt + [\ln(t)]_a^x \\
 &= - \int_a^x \frac{1 - f(t)}{t} dt + \ln(x) - \ln(a)
 \end{aligned}$$

Ainsi : $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt = \ln(x) - \ln(a) - \int_a^x \frac{1 - f(t)}{t} dt.$

- D'après la question précédente :

$$\int_a^x \frac{1 - f(t)}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} I(1)$$

Ainsi :

$$-\ln(a) - \int_a^x \frac{1 - f(t)}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\ln(a) - I(1) = O_{x \rightarrow +\infty}(1)$$

On en déduit :

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt = \ln(x) - \ln(a) - \int_a^x \frac{1 - f(t)}{t} dt = \ln(x) + O_{x \rightarrow +\infty}(1)$$

Finalement : $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x).$

□

4. On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Prouver que l'on a : $\lambda = \mu$.

Démonstration.

On procède par l'absurde.

Supposons : $\lambda \neq \mu$.

- Comme $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent, alors $I(\lambda) - I(\mu)$ existe aussi.
- De plus, pour tout $b \in [a, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt - \int_a^b \frac{\mu - f(t)}{t} dt &= \int_a^b \frac{\lambda - \cancel{f(t)}}{t} - \frac{\mu - \cancel{f(t)}}{t} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\
 &= \int_a^b \frac{\lambda - \mu}{t} dt \\
 &= (\lambda - \mu) \int_a^b \frac{1}{t} dt \\
 &= (\lambda - \mu) [\ln(t)]_a^b \\
 &= (\lambda - \mu) (\ln(b) - \ln(a))
 \end{aligned}$$

- Deux cas se présentent alors :

× si $\lambda \leq \mu$, alors :

$$\int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt - \int_a^b \frac{\mu - f(t)}{t} dt = (\lambda - \mu) (\ln(b) - \ln(a)) \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} -\infty$$

Or :

$$\int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt - \int_a^b \frac{\mu - f(t)}{t} dt \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} I(\lambda) - I(\mu)$$

Absurde ! (car $I(\lambda) - I(\mu)$ existe)

× si $\lambda \geq \mu$, alors :

$$\int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt - \int_a^b \frac{\mu - f(t)}{t} dt = (\lambda - \mu) (\ln(b) - \ln(a)) \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} +\infty$$

Or :

$$\int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt - \int_a^b \frac{\mu - f(t)}{t} dt \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} I(\lambda) - I(\mu)$$

Absurde ! (car $I(\lambda) - I(\mu)$ existe)

On en déduit : $\lambda = \mu$.

□

5. Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x) = \int_a^x (\lambda - f(t)) dt$.

a) Justifier que H_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $H'_\lambda(x)$.

Démonstration.

La fonction $h_\lambda : t \mapsto \lambda - f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction H_λ est l'unique primitive de h_λ qui s'annule en a .

La fonction H_λ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H'_\lambda(x) = h_\lambda(x) = \lambda - f(x)$$

□

b) Démontrer que si H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $I(\lambda)$ existe et : $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$.

Démonstration.

Supposons que la fonction H_λ est bornée.

- Soit $b \in [a, +\infty[$.

$$\int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt = \int_a^b \frac{h_\lambda(t)}{t} dt \quad (\text{par définition de } h_\lambda)$$

$$= \left[\frac{1}{t} \times H_\lambda(t) \right]_a^b - \int_a^b -\frac{1}{t^2} \times H_\lambda(t) dt \quad (\text{par intégration par parties})$$

$$= \frac{H_\lambda(b)}{b} - \frac{H_\lambda(a)}{a} + \int_a^b \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$$

$$= \frac{H_\lambda(b)}{b} - \cancel{\frac{0}{a}} + \int_a^b \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt \quad (\text{car } H_\lambda \text{ s'annule en } a)$$

- De plus :

× la fonction H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$,

× on sait : $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} = 0$.

Ainsi : $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{H_\lambda(b)}{b} = 0$.

- Comme la fonction H_λ est bornée, alors : $|H_\lambda(t)| = O(1)$ à $t \rightarrow +\infty$. Ainsi :

× tout d'abord : $\left| \frac{H_\lambda(t)}{t^2} \right| = \frac{|H_\lambda(t)|}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$

× ensuite : $\forall t \in [a, +\infty[$, $\left| \frac{H_\lambda(t)}{t^2} \right| \geq 0$ et $\frac{1}{t^2} \geq 0$

D'après le *Résultat 1*, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$ existe.

- Comme la fonction $b \mapsto \frac{H_\lambda(b)}{b}$ admet une limite finie en $+\infty$ et que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$ existe, alors la fonction $b \mapsto \int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

Autrement dit, $I(\lambda)$ existe.

- De plus, on rappelle, pour tout $b \in [a, +\infty[$:

$$\int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt = \frac{H_\lambda(b)}{b} + \int_a^b \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$$

On en déduit :

$$I(\lambda) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt = 0 + \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$$

$$I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$$

□

6. Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et T -périodique ($T > 0$).

- a) Démontrer que la fonction φ qui à tout réel x associe $\varphi(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt$ est constante.

Montrer alors que l'on a, pour tout réel x : $H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \int_0^T f(t) dt$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_x^{x+T} f(t) dt$ est bien définie.

Autrement dit, la fonction φ est bien définie.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \int_x^{x+T} f(t) \, dt \\
 &= \int_x^0 f(t) \, dt + \int_0^T f(t) \, dt + \int_T^{x+T} f(t) \, dt && (\text{par relation de Chasles}) \\
 &= -\int_0^x f(t) \, dt + \int_0^T f(t) \, dt + \int_0^x f(u+T) \, du && (\text{avec le changement de variable } \boxed{u = t - T}) \\
 &= -\cancel{\int_0^x f(t) \, dt} + \int_0^T f(t) \, dt + \cancel{\int_0^x f(u) \, du} && (\text{car } f \text{ est } T\text{-périodique}) \\
 &= \int_0^T f(t) \, dt
 \end{aligned}$$

Cette dernière quantité ne dépend pas de x .

La fonction φ est donc constante sur $\mathbb{R}$.

Commentaire

On pouvait également repérer une intégrale fonction de ses bornes. La rédaction s'adaptait de la façon suivante.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(x) = \int_x^{x+T} f(t) \, dt = [F(t)]_x^{x+T} = F(x+T) - F(x)$$

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, car elle est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \varphi'(x) &= F'(x+T) - F'(x) \\
 &= f(x+T) - f(x) && (\text{car } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}) \\
 &= f(x) - f(x) && (\text{car } f \text{ est } T\text{-périodique}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) &= \int_a^{x+T} (\lambda - f(t)) dt - \int_a^x (\lambda - f(t)) dt \\
 &= \int_x^a (\lambda - f(t)) dt + \int_a^{x+T} (\lambda - f(t)) dt \\
 &= \int_x^{x+T} (\lambda - f(t)) dt && \text{(par relation de Chasles)} \\
 &= \lambda \int_x^{x+T} 1 dt - \varphi(x) && \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
 &= \lambda [t]_x^{x+T} - \varphi(x) \\
 &= \lambda((x+T) - x) - \varphi(x) \\
 &= \lambda T + \varphi(0) && \text{(car } \varphi \text{ est constante sur } \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \int_0^T f(t) dt.$

□

- b) Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour laquelle la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = H_\lambda(a+nT)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= H_\lambda(a+(n+1)T) - H_\lambda(a+nT) \\
 &= H_\lambda((a+nT)+T) - H_\lambda(a+nT) \\
 &= \lambda T - \int_0^T f(t) dt && \text{(d'après la question précédente appliquée à : } x = a+nT \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Comme cette dernière quantité ne dépend pas de n , on la note r . Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r$$

La suite (u_n) est donc arithmétique de raison r .

- On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$$

On en déduit que la suite (u_n) est bornée si et seulement si : $r = 0$.

- De plus :

$$\begin{aligned}
 r = 0 &\Leftrightarrow \lambda T - \int_0^T f(t) dt = 0 \\
 &\Leftrightarrow \lambda T = \int_0^T f(t) dt \\
 &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt
 \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une unique valeur λ_0 pour laquelle la suite $(H_\lambda(a+nT))$ est bornée : $\lambda_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$

□

c) Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Supposons : $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$.

- Tout d'abord, démontrons que la fonction H_{λ_0} est T -périodique.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} H_{\lambda_0}(x+T) &= H_{\lambda_0}(x) + \lambda_0 T - \int_0^T f(t) dt && (d'après \textbf{6a}) \\ &= H_{\lambda_0}(x) + \cancel{T} \times \frac{1}{\cancel{T}} \int_0^T f(t) dt - \int_0^T f(t) dt \\ &= H_{\lambda_0}(x) + \cancel{\int_0^T f(t) dt} - \cancel{\int_0^T f(t) dt} \\ &= H_{\lambda_0}(x) \end{aligned}$$

La fonction H_{λ_0} est donc T -périodique sur $\mathbb{R}$.

- Démontrons que la fonction H_{λ_0} est bornée sur $\mathbb{R}$.
 - × La fonction H_{λ_0} est continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$. Elle est donc continue sur le segment $[0, T]$. Elle est ainsi bornée sur ce segment.
 - × Soit $k \in \mathbb{Z}$.
Comme la fonction H_{λ_0} est T -périodique sur $\mathbb{R}$, alors sa courbe représentative sur le segment $[kT, (k+1)T]$ est la translatée de celle sur le segment $[0, T]$.
La fonction H_{λ_0} est donc également bornée sur $[kT, (k+1)T]$, par les mêmes bornes.
 - × Comme, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction H_{λ_0} est bornée sur $[kT, (k+1)T]$, alors elle est bornée sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [kT, (k+1)T] = \mathbb{R}$.

La fonction H_{λ_0} est bornée sur $\mathbb{R}$.

Commentaire

On pouvait démontrer le caractère borné plus rigoureusement.

- × La fonction H_{λ_0} est continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$. Elle est donc continue sur le segment $[0, T]$. Elle est ainsi bornée sur ce segment. Autrement dit, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in [0, T], \quad |H_{\lambda_0}(x)| \leq M$$

- × Soit $x \in \mathbb{R}$.

Il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x \in [kT, (k+1)T]$ (on peut même démontrer : $k = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$).

Ainsi :

$$\begin{aligned} |H_{\lambda_0}(x)| &= |H_{\lambda_0}(x - kT)| \quad (\text{par } T\text{-périodicité de } H_{\lambda_0}) \\ &\leq M \quad (\text{car } x - kT \in [0, T]) \end{aligned}$$

On a ainsi démontré : $\forall x \in \mathbb{R}, |H_{\lambda_0}(x)| \leq M$.

Autrement dit, la fonction H_{λ_0} est bornée sur $\mathbb{R}$. □

d) Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.

Démonstration.

Deux cas se présentent.

- si $\lambda = \lambda_0$, alors, d'après la question précédente, la fonction H_{λ_0} est bornée sur $\mathbb{R}$.
D'après la question **5b**, on en déduit que $I(\lambda_0)$ existe.
- si $\lambda \neq \lambda_0$, alors on procède par l'absurde.
Supposons que $I(\lambda)$ existe.
On sait alors que $I(\lambda)$ et $I(\lambda_0)$ existent. D'après la question **4**, on en déduit : $\lambda = \lambda_0$.
Absurde !

Finalement, seul $I(\lambda_0)$ existe.

□

e) Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ lorsque x tend vers l'infini.

Démonstration.

Supposons : $\lambda_0 \neq 0$.

On effectue un raisonnement similaire à celui de la question **3c**.

- Soit $x \in [a, +\infty[$.

La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est continue sur le SEGMENT $[a, x]$.

L'intégrale $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ est donc bien définie.

- De plus :

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{f(t)}{t} dt &= \int_a^x \frac{f(t) - \lambda_0 + \lambda_0}{t} dt \\ &= - \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt + \lambda_0 \int_a^x \frac{1}{t} dt && \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= - \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt + \lambda_0 [\ln(t)]_a^x \\ &= - \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt + \lambda_0 (\ln(x) - \ln(a)) \end{aligned}$$

Ainsi : $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt = \lambda_0 (\ln(x) - \ln(a)) - \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt.$

- D'après la question précédente, $I(\lambda_0)$ existe. Donc :

$$\int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} I(\lambda_0)$$

Ainsi :

$$-\lambda_0 \ln(a) - \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\lambda_0 \ln(a) - I(\lambda_0) = O(1)$$

On en déduit :

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt = \lambda_0 \ln(x) - \lambda_0 \ln(a) - \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt = \lambda_0 \ln(x) + O(1)$$

Finalement, comme $\lambda_0 \neq 0$: $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_0 \ln(x).$

□

7. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} dt$ et $B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t} dt$.

a) Prouver que A_n existe. On admettra qu'il en est de même pour B_n .

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrons que la fonction $f_n : t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ est prolongeable par continuité sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$

- Tout d'abord, la fonction f_n est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ car elle est le quotient $f_n = \frac{g_1}{g_2}$ de :
 × $g_1 : t \mapsto |\sin(nt)|$ qui est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$,
 × $g_2 : t \mapsto \sin(t)$ qui :
 - est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$,
 - NE S'ANNULE PAS sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
- De plus : $\lim_{t \rightarrow 0} nt = 0$. Donc :

$$f_n(t) = \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{|nt|}{t} = \frac{n \cancel{t}}{\cancel{t}} = n$$

Comme f_n admet une limite finie en 0, alors elle prolongeable par continuité en 0.

La fonction f_n est prolongeable par continuité sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.
L'intégrale A_n est donc bien définie.

□

b) Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$.

Démonstration.

Soit $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$.

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} = \frac{\sin(t) - t}{t \sin(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sin(t) - t}{t \times t} = \frac{\sin(t) - t}{t^2}$$

De plus :

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + o_{t \rightarrow 0}(t^4)$$

Donc :

$$\sin(t) - t = -\frac{t^3}{6} + o_{t \rightarrow 0}(t^4)$$

Ainsi : $\sin(t) - t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t^3}{6}$. D'où :

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sin(t) - t}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{t^3}{6}}{\cancel{t^2}^{\cancel{t^2}}} = -\frac{t}{6}$$

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t}{6}$$

□

c) Démontrer que la suite $(A_n - B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} A_n - B_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(nt)|}{t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(nt)| \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} |A_n - B_n| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(nt)| \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| |\sin(nt)| \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) \right| dt \quad (\text{par inégalité triangulaire}) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(nt)| \left| \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right| dt \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \left| \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right| dt \quad (\text{car : } \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq 1) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right| dt \end{aligned}$$

- De plus :

- × la fonction $h : t \mapsto \left| \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right|$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
- × d'après la question précédente :

$$h(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \left| -\frac{t}{6} \right| = \frac{|t|}{6} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

La fonction h est donc prolongeable par continuité en 0.

La fonction h est prolongeable par continuité sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) dt$ est donc bien définie.

- On note : $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right| dt$.

On a démontré :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |A_n - B_n| \leq K$$

La suite $(A_n - B_n)$ est donc bornée.

□

d) On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.

(i) Donner un équivalent de B_n lorsque n tend vers l'infini. On pourra utiliser les résultats établis à la question **6**.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} B_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(nt)|}{t} dt \\ &= \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{\frac{u}{n}} \times \frac{1}{n} du \quad (\text{avec le changement de variable } \boxed{u = nt}) \\ &= \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du \end{aligned}$$

- Pour appliquer la question **6**, plus précisément la question **6e**, il faut faire apparaître une intégrale de la forme $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ où : $a > 0$. On remarque alors :

$$B_n = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$$

L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ est un réel. On s'intéresse alors à la suite $\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- On cherche donc à appliquer la question **6** à la fonction $f : t \mapsto |\sin(t)|$.
 × Tout d'abord, la fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}$.
 × Ensuite, la fonction f est π -périodique. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t + \pi) = |\sin(t + \pi)| = |-\sin(t)| = |\sin(t)| = f(t)$$

- × Enfin :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin(t)| dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) dt \quad (\text{car : } \forall t \in [0, \pi], \sin(t) \geq 0) \\ &= \frac{1}{\pi} [-\cos(t)]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} (-\cos(\pi) + \cos(0)) \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Ainsi : $\lambda_0 \neq 0$.

D'après la question **6e** :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_0 \ln(x) = \frac{2}{\pi} \ln(x)$$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\pi}{2} = +\infty$. Donc :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{f(t)}{t} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \ln(n) + \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(n)$$

- On rappelle, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$$

On sait de plus que :

× l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ est une constante (par rapport à n).

× d'après ce qui précède :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

On en déduit : $B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(n)$.

□

(ii) En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque :

$$A_n = B_n + (A_n - B_n)$$

Donc :

$$\frac{A_n}{B_n} = 1 + \frac{A_n - B_n}{B_n}$$

- Or :

× d'après la question **7c**, la suite $(A_n - B_n)$ est bornée,

× d'après la question précédente :

$$B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

On en déduit :

$$\frac{A_n - B_n}{B_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On obtient alors :

$$\frac{A_n}{B_n} = 1 + \frac{A_n - B_n}{B_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

On en conclut :

$$A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(n)$$

$A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(n)$

□

Problème II

Dans tout ce problème, lorsque E est un espace vectoriel et f un endomorphisme de E , on rappelle que $f^0 = \text{id}_E$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f^n \circ f = f \circ f^n$.

Partie I : Un projecteur

On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et l'application :

$$p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right)$$

On note $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, -1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, -1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

8. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

Supposons :

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \lambda_3 \cdot e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad (*)$$

On remarque :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \lambda_3 \cdot e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff \lambda_1 \cdot (1, 1, 1) + \lambda_2 \cdot (1, -1, 0) + \lambda_3 \cdot (0, 1, -1) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\quad \text{(par remontées successives)} \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc libre.

- La famille $\mathcal{B}$:

× est libre, d'après ce qui précède,

× vérifie : $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

On en déduit que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

□

9. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Démontrons d'abord que p est linéaire.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(u_1, u_2) \in (\mathbb{R}^3)^2$.
Alors il existe $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$u_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{et} \quad u_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

On remarque :

$$\begin{aligned} p(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2) &= \left(\begin{array}{c} \frac{2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)}{3}, \\ \frac{-(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)}{3}, \\ \frac{-(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + 2(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)}{3} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} \lambda_1 \frac{2x_1 - y_1 - z_1}{3} + \lambda_2 \frac{2x_2 - y_2 - z_2}{3}, \\ \lambda_1 \frac{-x_1 + 2y_1 - z_1}{3} + \lambda_2 \frac{-x_2 + 2y_2 - z_2}{3}, \\ \lambda_1 \frac{-x_1 - y_1 + 2z_1}{3} + \lambda_2 \frac{-x_2 - y_2 + 2z_2}{3} \end{array} \right) \\ &= \lambda_1 \cdot \left(\frac{2x_1 - y_1 - z_1}{3}, \frac{-x_1 + 2y_1 - z_1}{3}, \frac{-x_1 - y_1 + 2z_1}{3} \right) \\ &\quad + \lambda_2 \cdot \left(\frac{2x_2 - y_2 - z_2}{3}, \frac{-x_2 + 2y_2 - z_2}{3}, \frac{-x_2 - y_2 + 2z_2}{3} \right) \\ &= \lambda_1 \cdot p(u_1) + \lambda_2 \cdot p(u_2) \end{aligned}$$

On en conclut que l'application p est linéaire.

- Démontrons ensuite : $p \circ p = p$.
Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$u = (x, y, z)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}(p \circ p)(u) &= p(p(u)) \\ &= p\left(\left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3}\right)\right) \\ &= p(v_1, v_2, v_3) \\ &= \left(\frac{2v_1 - v_2 - v_3}{3}, \frac{-v_1 + 2v_2 - v_3}{3}, \frac{-v_1 - v_2 + 2v_3}{3}\right)\end{aligned}$$

De plus :

× tout d'abord :

$$\begin{aligned}\frac{2v_1 - v_2 - v_3}{3} &= \frac{2}{3} \frac{2x - y - z}{3} - \frac{1}{3} \frac{-x + 2y - z}{3} - \frac{1}{3} \frac{-x - y + 2z}{3} \\ &= \frac{2(2x - y - z) - (-x + 2y - z) - (-x - y + 2z)}{9} \\ &= \frac{4x - 2y - 2z + x - 2y + z + x + y - 2z}{9} \\ &= \frac{6x - 3y - 3z}{9} \\ &= \frac{\cancel{3}(2x - y - z)}{\cancel{3} \times 3} \\ &= \frac{2x - y - z}{3}\end{aligned}$$

× on obtient de même :

$$\frac{-v_1 + 2v_2 - v_3}{3} = \frac{-x + 2y - z}{3} \quad \text{et} \quad \frac{-v_1 - v_2 + 2v_3}{3} = \frac{-x - y + 2z}{3}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}(p \circ p)(u) &= \left(\frac{2v_1 - v_2 - v_3}{3}, \frac{-v_1 + 2v_2 - v_3}{3}, \frac{-v_1 - v_2 + 2v_3}{3}\right) \\ &= \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3}\right) \\ &= p(u)\end{aligned}$$

Ainsi : $p \circ p = p$.

L'endomorphisme p est donc un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

□

10. Déterminer une base puis la dimension du noyau de p . En déduire le rang de p .

Démonstration.

- Soit $u \in \mathbb{R}^3$.

Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $u = (x, y, z)$.

$$\begin{aligned}
 u \in \text{Ker}(p) &\iff p(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\iff \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right) = (0, 0, 0) \\
 &\iff 3 \cdot \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right) = 3 \cdot (0, 0, 0) \\
 &\iff (2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z) = (0, 0, 0) \\
 &\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \\
 \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{matrix} &\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \\
 \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} &\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 2x - y = z \\ 3y = 3z \end{cases} \\
 \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 \end{matrix} &\iff \begin{cases} 6x = 6z \\ 3y = 3z \end{cases}
 \end{aligned}$$

- On obtient :

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(p) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ et } y = z\} \\
 &= \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{z \cdot (1, 1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}((1, 1, 1))
 \end{aligned}$$

- La famille $\mathcal{F}_0 = ((1, 1, 1))$ est donc :
 - × génératrice de $\text{Ker}(p)$, d'après ce qui précède,
 - × libre, car elle est constituée uniquement d'un vecteur, qui est non nul.
 C'est donc une base de $\text{Ker}(p)$. Ainsi :

$$\dim(\text{Ker}(p)) = \text{Card}(\mathcal{F}_0) = 1$$

La famille $\mathcal{F}_0 = ((1, 1, 1))$ est une base de $\text{Ker}(p)$ et : $\dim(\text{Ker}(p)) = 1$.

- On sait que :
 - × le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie,
 - × l'application p est linéaire.

Par théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(\mathbb{R}^3) & = & \dim(\text{Ker}(p)) & + & \dim(\text{Im}(p)) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 3 & & 1 & & \text{rg}(p) \end{array}$$

On en déduit : $\text{rg}(p) = 3 - 1 = 2$.

□

11. Démontrer : $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\dim(\text{Ker}(p)) + \dim(\text{Im}(p)) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

- Il reste donc à démontrer que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont en somme directe, *i.e.* : $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
On procède par double inclusion.

($\supset$) Les ensembles $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Donc :

$$0_{\mathbb{R}^3} \in \text{Ker}(p) \quad \text{et} \quad 0_{\mathbb{R}^3} \in \text{Im}(p)$$

Ainsi : $0_{\mathbb{R}^3} \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$. Autrement dit : $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subset \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$.

($\subset$) Soit $v \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$.

- × Comme $v \in \text{Ker}(p)$, alors : $p(v) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
- × Comme $v \in \text{Im}(p)$, alors il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que : $v = p(u)$.

On obtient :

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{R}^3} &= p(v) \\ &= p(p(u)) \\ &= (p \circ p)(u) \\ &= p(u) && (\text{car } p \text{ est un projecteur}) \\ &= v \end{aligned}$$

Finalement : $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

- On a démontré :
 - × d'une part : $\dim(\text{Ker}(p)) + \dim(\text{Im}(p)) = \dim(\mathbb{R}^3)$
 - × d'autre part : $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

On en conclut : $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

□

Partie II : Un exemple

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

et on note u l'application linéaire canoniquement associée à A :

$$\begin{aligned} u : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

12. Montrer que $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 4\lambda + 5\mu \\ -2\lambda - \mu \\ -4\lambda - 5\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 4\lambda + 5\mu = -1 \\ -2\lambda - \mu = 1 \\ -4\lambda - 5\mu = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ \iff \end{array} \begin{cases} 4\lambda + 5\mu = -1 \\ 3\mu = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 - 5L_2 \\ \iff \end{array} \begin{cases} 12\lambda = -8 \\ 3\mu = 1 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

□

13. Justifier : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$. A-t-on : $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$u \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(u)$.

- On sait que :

- × le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ est de dimension finie,
- × l'application u est linéaire.

Par caractérisation de l'image d'une application linéaire en dimension finie :

$$\begin{aligned} \text{Im}(u) &= \text{Vect} \left(u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right) \quad \left(\text{car} : \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$$

Ainsi : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Im}(u)$

Finalement : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$

- On déduit de ce qui précède :

$$\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})}\}$$

On en conclut : $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \neq \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

□

14. Calculer A^2 .

Démonstration.

On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

□

15. Déterminer une base de $\text{Ker}(u^2)$ et une base de $\text{Im}(u^2)$.

Démonstration.

- Déterminons une base de $\text{Ker}(u)$.

× Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 X \in \text{Ker}(u^2) &\iff u^2(X) = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \\
 &\iff u(u(X)) = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \\
 &\iff u(AX) = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \\
 &\iff A \times (AX) = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \\
 &\iff A^2 X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} -2x + 2y - 4z = 0 \\ -2x + 2y - 4z = 0 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} -2x + 2y - 4z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = x + 2z \end{cases}
 \end{aligned}$$

× On obtient :

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(u^2) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid y = x + 2z \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x + 2z \\ z \end{pmatrix} \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
 &= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

× La famille $\mathcal{G}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc :

- génératrice de $\text{Ker}(u^2)$, d'après ce qui précède,
- libre, car constituée de 2 vecteurs non colinéaires.

La famille $\mathcal{G}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc une base de $\text{Ker}(u^2)$.

• Déterminons $\text{Im}(u^2)$.

× On sait que :

- le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ est de dimension finie,
- l'application u^2 est linéaire.

Par caractérisation de l'image d'une application linéaire en dimension finie :

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(u^2) &= \text{Vect} \left(u^2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), u^2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), u^2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \\
 &= \text{Vect} \left(A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{avec le même raisonnement que pour } \text{Ker}(u^2)) \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \quad \left(\text{car : } \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

× La famille $\mathcal{G}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est donc :

- génératrice de $\text{Im}(u)$, d'après ce qui précède,
- libre, car constituée uniquement d'un vecteur, qui est non nul.

La famille $\mathcal{G}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est donc une base de $\text{Im}(u^2)$.

□

16. Montrer que $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) = \text{Ker}(u^2) \oplus \text{Im}(u^2)$.

Démonstration.

• Démontrons que la famille $\mathcal{B}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

× Démontrons que la famille $\mathcal{B}_0$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$.

Supposons :

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \quad (*)$$

On remarque :

$$(*) \iff \begin{cases} \lambda_1 & + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 & + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ & \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 & + \lambda_3 = 0 \\ & 2\lambda_2 = 0 \\ & \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 & + \lambda_3 = 0 \\ & 2\lambda_2 = 0 \\ & -2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{par remontées successives})$$

Ainsi : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

La famille $\mathcal{B}_0$ est donc libre.

× La famille $\mathcal{B}_0$:

- est libre, d'après ce qui précède,
- vérifie : $\text{Card}(\mathcal{B}_0) = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}))$.

La famille $\mathcal{B}_0$ est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

• On a démontré que la concaténation d'une base de $\text{Ker}(u^2)$ et d'une base de $\text{Im}(u^2)$ forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

On en conclut : $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) = \text{Ker}(u^2) \oplus \text{Im}(u^2)$.

□

Partie III : Carré de f

Soit f un endomorphisme quelconque d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

17. Montrer : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

Démonstration.

- Démontrons : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.

Soit $x \in \text{Ker}(f)$.

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) \\ &= f(0_E) \quad (\text{car } x \in \text{Ker}(f)) \\ &= 0_E \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \end{aligned}$$

Ainsi : $x \in \text{Ker}(f^2)$.

$\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$

- Démontrons : $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

Soit $y \in \text{Im}(f^2)$.

Alors il existe $x \in E$ tel que : $y = f^2(x) = f(f(x))$.

On note : $x_0 = f(x) \in E$. Alors : $y = f(x_0)$.

Ainsi : $y \in \text{Im}(f)$.

$\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$

□

18. On suppose dans cette question : $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ tel que $f(x) = f^2(x')$ puis que $x - f(x') \in \text{Ker}(f)$. En déduire que $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$.

Démonstration.

- Soit $x \in E$.

On remarque : $f(x) \in \text{Im}(f)$. Or : $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$. Donc : $f(x) \in \text{Im}(f^2)$.

Il existe donc $x' \in E$ tel que : $f(x) = f^2(x')$.

- Démontrons : $x - f(x') \in \text{Ker}(f)$.

$$\begin{aligned} f(x - f(x')) &= f(x) - f^2(x') \quad (\text{par linéarité de } f) \\ &= f(x) - f(x) \quad (\text{d'après le point précédent}) \\ &= 0_E \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ tel que : $f(x) = f^2(x')$
et $x - f(x') \in \text{Ker}(f)$.

- Soit $x \in E$.

D'après le point précédent, il existe $x' \in E$ tel que : $f(x) = f^2(x')$.

On remarque alors :

$$x = (x - f(x')) + f(x')$$

Or :

× d'une part, d'après le point précédent : $x - f(x') \in \text{Ker}(f)$,

× d'autre part : $f(x') \in \text{Im}(f)$.

On a donc démontré que tout vecteur x de E se décompose comme la somme d'un élément de $\text{Ker}(f)$ et d'un élément de $\text{Im}(f)$.

On en déduit : $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$.

□

19. Montrer que si $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$ alors : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$.

Démonstration.

Supposons : $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$. Démontrons : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$.

Soit $y \in \text{Im}(f)$.

Alors il existe $x \in E$ tel que : $y = f(x)$.

- On sait : $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$. Or : $x \in E$.

Il existe donc $(x_0, v) \in E^2$ tel que :

(i) $x_0 \in \text{Ker}(f)$

(ii) $v \in \text{Im}(f)$

(iii) $x = x_0 + v$

- Comme $v \in \text{Im}(f)$, alors il existe $u \in E$ tel que : $v = f(u)$.
- On remarque alors :

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= f(x_0 + v) && (d'après (iii)) \\ &= f(x_0) + f(v) && (par linéarité de f) \\ &= 0_E + f(v) && (d'après (i)) \\ &= f^2(u) && (car : v = f(u)) \end{aligned}$$

Ainsi : $y \in \text{Im}(f^2)$.

Ainsi, si $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$, alors : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$.

□

20. Dédurre des questions précédente l'équivalence :

$$E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$$

Démonstration.

On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons : $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$. Démontrons : $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$.

On procède par double inclusion.

($\subset$) Cette inclusion est toujours vraie d'après la question **17**.

($\supset$) Comme $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$, alors, d'après la question précédente : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$.

($\Leftarrow$) Supposons : $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$.

Alors, d'après la question **18** : $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$.

Finalement : $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$

□

21. Montrer de la même manière l'équivalence :

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$$

Démonstration.

On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons : $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$. Démontrons : $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$.

On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $x \in \text{Ker}(f^2)$. Alors :

× d'une part : $f(x) \in \text{Ker}(f)$. En effet :

$$f(f(x)) = f^2(x) = 0_E \quad (\text{car : } x \in \text{Ker}(f^2))$$

× d'autre part : $f(x) \in \text{Im}(f)$.

Ainsi : $f(x) \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.

Or, on a supposé : $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$. On en déduit : $f(x) \in \{0_E\}$. Autrement dit : $f(x) = 0_E$.

D'où : $x \in \text{Ker}(f)$.

($\supset$) Cette inclusion est toujours vraie d'après la question **17**.

Ainsi, si $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$, alors : $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$.

($\Leftarrow$) Supposons : $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$. Démontrons : $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $y \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.

× Comme $y \in \text{Ker}(f)$, alors : $f(y) = 0_E$.

× Comme $y \in \text{Im}(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que : $y = f(x)$.

On en déduit :

$$f(y) = f(f(x)) = f^2(x)$$

Ainsi : $f^2(x) = f(y) = 0_E$. Autrement dit : $x \in \text{Ker}(f^2)$.

Or on a supposé : $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$. Donc : $x \in \text{Ker}(f)$. D'où :

$$y = f(x) = 0_E$$

($\supset$) Les ensembles $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de E . Ainsi : $\{0_E\} \subset \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.

Ainsi, si $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$, alors : $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

Enfinement : $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$

□

22. Conclure : $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ si et seulement si $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$.

Démonstration.

On remarque :

$$\begin{aligned} E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) &\Leftrightarrow \begin{cases} E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \\ \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f) \\ \text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f) \end{cases} \quad (\text{d'après } \textcolor{red}{20} \text{ et } \textcolor{red}{21}) \end{aligned}$$

On en conclut que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ si et seulement si $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$ □

Partie IV : Suites des noyaux et des images de f^k et décomposition de E

Dans la suite, on considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E quelconque et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$K_n = \text{Ker}(f^n) \quad \text{et} \quad I_n = \text{Im}(f^n) \quad \text{puis} \quad k_n = \dim(K_n) \quad \text{et} \quad i_n = \dim(I_n)$$

(lorsque K_n ou I_n ne sont pas de dimension finie, on pose respectivement $k_n = +\infty$ ou $i_n = +\infty$).

23. En procédant comme dans la question 17, montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $K_n \subset K_{n+1}$ et $I_{n+1} \subset I_n$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Démontrons : $K_n \subset K_{n+1}$.

Soit $x \in K_n$.

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= f(f^n(x)) \\ &= f(0_E) \quad (\text{car} : x \in K_n) \\ &= 0_E \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \end{aligned}$$

Ainsi : $x \in K_{n+1}$.

$K_n \subset K_{n+1}$

- Démontrons : $I_{n+1} \subset I_n$.

Soit $y \in I_{n+1}$.

Alors il existe $x \in E$ tel que : $y = f^{n+1}(x) = f^n(f(x))$.

On note : $x_0 = f(x) \in E$. Alors : $y = f^n(x_0)$.

Ainsi : $y \in I_n$.

$I_{n+1} \subset I_n$

□

24. On suppose dans cette question qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $K_s = K_{s+1}$. Montrer que $K_s = K_{s+2}$ puis que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq s$:

$$K_s = K_m$$

Démonstration.

- Démontrons : $K_s = K_{s+2}$. Pour cela, on démontre : $K_{s+1} = K_{s+2}$. On procède par double inclusion.

($\subset$) D'après la question précédente appliquée à $n = s + 1$:

$$K_{s+1} \subset K_{s+2}$$

($\supset$) Soit $x \in K_{s+2}$. Alors : $f^{s+2}(x) = 0_E$. Donc :

$$f^{s+1}(f(x)) = 0_E$$

D'où : $f(x) \in K_{s+1}$.

Or : $K_{s+1} = K_s$. Donc : $f(x) \in K_s$. D'où :

$$f^s(f(x)) = 0_E$$

Ainsi : $f^{s+1}(x) = 0_E$. Autrement dit : $x \in K_{s+1}$.

Finalement : $K_{s+2} = K_{s+1} = K_s$.

- Démontrons par récurrence : $\forall m \in \llbracket s, +\infty \rrbracket, \mathcal{P}(m)$ où $\mathcal{P}(m) : K_s = K_m$.

► **Initialisation** :

On sait : $K_s = K_s$.

D'où $\mathcal{P}(s)$.

► **Hérédité** : soit $m \in \llbracket s, +\infty \rrbracket$.

Supposons $\mathcal{P}(m)$ et démontrons $\mathcal{P}(m+1)$ (i.e. : $K_s = K_{m+1}$).

Par hypothèse de récurrence : $K_s = K_m$. Pour démontrer : $K_s = K_{m+1}$, il suffit donc de démontrer : $K_m = K_{m+1}$.

On procède par double inclusion.

($\subset$) D'après la question précédente appliquée à $n = m$:

$$K_m \subset K_{m+1}$$

($\supset$) Soit $x \in K_{m+1}$. Alors : $f^{m+1}(x) = 0_E$. Donc :

$$f^m(f(x)) = 0_E$$

D'où : $f(x) \in K_m$.

Or : $K_m = K_s$. Donc : $f(x) \in K_s$. D'où :

$$f^s(f(x)) = 0_E$$

Ainsi : $f^{s+1}(x) = 0_E$. Autrement dit : $x \in K_{s+1}$.

Enfin : $K_{s+1} = K_s$. Donc, par hypothèse de récurrence :

$$K_{s+1} = K_s = K_m$$

On en déduit : $x \in K_m$.

On obtient :

$$K_{m+1} = K_m = K_s$$

D'où $\mathcal{P}(m+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall m \in \llbracket s, +\infty \rrbracket, K_s = K_m$.

□

25. On suppose dans cette question qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $I_r = I_{r+1}$. Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq r$:

$$I_r = I_m$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall m \in \llbracket r, +\infty \rrbracket, \mathcal{P}(m) : I_r = I_m$.

► **Initialisation** :

On sait : $I_r = I_r$.

D'où $\mathcal{P}(r)$.

► **Hérédité** : soit $m \in \llbracket r, +\infty \rrbracket$.

Supposons $\mathcal{P}(m)$ et démontrons $\mathcal{P}(m+1)$ (i.e. : $I_r = I_{m+1}$).

Par hypothèse de récurrence : $I_r = I_m$. Pour démontrer : $I_r = I_{m+1}$, il suffit donc de démontrer : $I_m = I_{m+1}$.

On procède par double inclusion.

(C) Soit $y \in I_m$.

Alors il existe $x \in E$ tel que : $y = f^m(x)$.

On remarque : $y = f^m(x) = f^{m-r}(f^r(x))$.

De plus : $f^r(x) \in I_r$. Or : $I_r = I_{r+1}$. D'où : $f^r(x) \in I_{r+1}$. Il existe donc $x_0 \in E$ tel que : $f^r(x) = f^{r+1}(x_0)$. On en déduit :

$$y = f^{m-r}(f^r(x)) = f^{m-r}(f^{r+1}(x_0)) = f^{m+1}(x_0)$$

Ainsi : $y \in I_{m+1}$.

(D) D'après la question 23 appliquée à $n = m$:

$$I_{m+1} \subset I_m$$

Finalement : $I_{m+1} = I_m = I_r$.

D'où $\mathcal{P}(m+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall m \in \llbracket r, +\infty \rrbracket, I_r = I_m$.

□

26. On suppose dans cette question qu'il existe $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ tel que $I_r = I_{r+1}$ et $K_s = K_{s+1}$. On note s_0 et r_0 les plus petits entiers r, s respectifs tels que $I_{r_0} = I_{r_0+1}$ et $K_{s_0} = K_{s_0+1}$. Montrer : $r_0 = s_0$; et :

$$E = \text{Ker}(f^{r_0}) \oplus \text{Im}(f^{r_0})$$

Démonstration.

• On procède par l'absurde.

Supposons : $\text{NON}(r_0 = s_0)$, i.e. $r_0 \neq s_0$.

Deux cas se présentent.

× Si $r_0 \leq s_0$.

- On sait : $K_{s_0} = K_{s_0+1}$. Donc, d'après la question 24 : $\forall m \geq s_0, K_m = K_{s_0}$. En particulier :

$$\text{Ker}(f^{2s_0}) = K_{2s_0} = K_{s_0} = \text{Ker}(f^{s_0})$$

- D'après la question 21 appliquée à f^{s_0} , on en déduit :

$$\text{Ker}(f^{s_0}) \cap \text{Im}(f^{s_0}) = \{0_E\}$$

De plus : $I_{r_0} = I_{r_0+1}$. Ainsi, d'après la question 25 : $\forall m \geq r_0, I_m = I_{r_0}$. En particulier, comme $s_0 > r_0$:

$$\text{Im}(f^{s_0}) = I_{s_0} = I_{r_0} = \text{Im}(f^{r_0})$$

On en déduit :

$$\text{Ker}(f^{s_0}) \cap \text{Im}(f^{r_0}) = \{0_E\}$$

- Enfin, d'après la question 23, comme $s_0 > r_0$, alors :

$$\text{Ker}(f^{r_0}) = K_{r_0} \subset K_{s_0} = \text{Ker}(f^{s_0})$$

On en conclut :

$$\text{Ker}(f^{r_0}) \cap \text{Im}(f^{r_0}) \subset \text{Ker}(f^{s_0}) \cap \text{Im}(f^{r_0}) = \{0_E\}$$

Or, $\text{Ker}(f^{r_0})$ et $\text{Im}(f^{r_0})$ sont des sous-espaces vectoriels de E , donc : $\{0_E\} \subset \text{Ker}(f^{r_0}) \cap \text{Im}(f^{r_0})$. D'où :

$$\text{Ker}(f^{r_0}) \cap \text{Im}(f^{r_0}) = \{0_E\}$$

- Ainsi, d'après la question **21** appliquée à f^{r_0} :

$$\text{Ker}(f^{2r_0}) = \text{Ker}(f^{r_0})$$

Or, d'après la question **23** :

$$\text{Ker}(f^{r_0}) \subset \text{Ker}(f^{r_0+1}) \subset \text{Ker}(f^{2r_0})$$

Ainsi : $\text{Ker}(f^{r_0+1}) = \text{Ker}(f^{r_0})$.

Absurde ! En effet, d'après l'énoncé, s_0 est le plus petit entier tel que : $\text{Ker}(f^{s_0+1}) = \text{Ker}(f^{s_0})$.
Or : $r_0 < s_0$ et $\text{Ker}(f^{r_0+1}) = \text{Ker}(f^{r_0})$.

× Si $r_0 \geq s_0$.

- On sait : $I_{r_0} = I_{r_0+1}$. Donc, d'après la question précédente : $\forall m \geq r_0, I_m = I_{r_0}$. En particulier :

$$\text{Im}(f^{2r_0}) = I_{2r_0} = I_{r_0} = \text{Im}(f^{r_0})$$

- D'après la question **20** appliquée à f^{r_0} , on en déduit :

$$E = \text{Ker}(f^{r_0}) + \text{Im}(f^{r_0})$$

De plus : $K_{s_0} = K_{s_0+1}$. Ainsi, d'après la question **24** : $\forall m \geq s_0, K_m = K_{s_0}$. En particulier, comme $r_0 > s_0$:

$$\text{Ker}(f^{r_0}) = K_{r_0} = K_{s_0} = \text{Ker}(f^{s_0})$$

On en déduit :

$$E = \text{Ker}(f^{s_0}) + \text{Im}(f^{r_0})$$

- Enfin, d'après la question **23**, comme $r_0 > s_0$, alors :

$$\text{Im}(f^{r_0}) = I_{r_0} \subset I_{s_0} = \text{Im}(f^{s_0})$$

On en conclut :

$$E = \text{Ker}(f^{s_0}) + \text{Im}(f^{r_0}) \subset \text{Ker}(f^{s_0}) + \text{Im}(f^{s_0})$$

Or, $\text{Ker}(f^{s_0})$ et $\text{Im}(f^{s_0})$ sont des sous-espaces vectoriels de E , donc : $\text{Ker}(f^{s_0}) + \text{Im}(f^{s_0}) \subset E$.
D'où :

$$E = \text{Ker}(f^{s_0}) + \text{Im}(f^{s_0})$$

- Ainsi, d'après la question **20** appliquée à f^{s_0} :

$$\text{Im}(f^{2s_0}) = \text{Im}(f^{s_0})$$

Or, d'après la question **23** :

$$\text{Im}(f^{2s_0}) \subset \text{Im}(f^{s_0+1}) \subset \text{Im}(f^{s_0})$$

Ainsi : $\text{Im}(f^{s_0+1}) = \text{Im}(f^{s_0})$.

Absurde ! En effet, d'après l'énoncé, r_0 est le plus petit entier tel que : $\text{Im}(f^{r_0+1}) = \text{Im}(f^{r_0})$.
Or : $s_0 < r_0$ et $\text{Im}(f^{s_0+1}) = \text{Im}(f^{s_0})$.

Finalement : $r_0 = s_0$.

- On sait donc :

× d'une part : $I_{r_0} = I_{r_0+1}$. Donc, d'après la question 25 : $I_{r_0} = I_{2r_0}$.

× d'autre part : $K_{r_0} = K_{r_0+1}$. Donc, d'après la question 24 : $K_{r_0} = K_{2r_0}$.

Autrement dit :

$$\begin{cases} \text{Im}(f^{2r_0}) = \text{Im}(f^{r_0}) \\ \text{Ker}(f^{2r_0}) = \text{Ker}(f^{r_0}) \end{cases}$$

Ainsi, d'après la question 22 appliquée à f^{r_0} , on obtient : $E = \text{Ker}(f^{r_0}) \oplus \text{Im}(f^{r_0})$.

$$E = \text{Ker}(f^{r_0}) \oplus \text{Im}(f^{r_0})$$

□

Partie V : Cas où E est de dimension finie

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension finie.

27. Montrer que $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites d'entiers et déterminer leurs monotonies.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$k_n = \dim(K_n) \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad i_n = \dim(I_n) \in \mathbb{N}$$

Ainsi, les suites (k_n) et (i_n) sont des suites d'entiers.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question 23 : $K_n \subset K_{n+1}$. D'où :

$$\dim(K_n) \leq \dim(K_{n+1})$$

||

||

$$k_n \leq k_{n+1}$$

La suite (k_n) est donc croissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question 23 : $I_{n+1} \subset I_n$. D'où :

$$\dim(I_{n+1}) \leq \dim(I_n)$$

||

||

$$i_{n+1} \leq i_n$$

La suite (i_n) est donc décroissante.

□

28. Justifier que les suites $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées et qu'il existe $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k_r = k_{r+1}$ et $i_s = i_{s+1}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

Les ensembles $K_n = \text{Ker}(f^n)$ et $I_n = \text{Im}(f^n)$ sont des sous-espaces vectoriels de E . Ainsi :

$$\{0_E\} \subset K_n \subset E \quad \text{et} \quad \{0_E\} \subset I_n \subset E$$

On en déduit :

$$0 \leq k_n \leq \dim(E) \quad \text{et} \quad 0 \leq i_n \leq \dim(E)$$

Les suites (k_n) et (i_n) sont donc bornées.

- La suite (k_n) est :
 - × croissante, d'après la question précédente,
 - × majorée par $\dim(E)$ d'après le point précédent.

Elle est donc convergente.

Puisque la suite (k_n) est de plus une suite d'entiers (c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, k_n \in \mathbb{N}$), on en déduit qu'elle est stationnaire (*i.e.* constante à partir d'un certain rang).

Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ tel que : $k_r = k_{r+1}$.

- La suite (i_n) est :
 - × décroissante, d'après la question précédente,
 - × minorée par 0, d'après le début de cette question.

Elle est donc convergente.

Puisque la suite (i_n) est de plus une suite d'entiers (c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, i_n \in \mathbb{N}$), on en déduit qu'elle est stationnaire (*i.e.* constante à partir d'un certain rang).

Il existe donc $s \in \mathbb{N}$ tel que : $i_s = i_{s+1}$.

□

29. Notons r_0, s_0 les plus petits entiers naturels tel que $i_r = i_{r+1}$ et $k_s = k_{s+1}$. Montrer que $r_0 \leq \dim(E)$ et $s_0 \leq \dim(E)$ et que $r_0 = s_0$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, les suites (k_n) et (i_n) sont majorées par E .

En particulier : $r_0 \leq \dim(E)$ et $s_0 \leq \dim(E)$.

- On sait : $i_{r_0} = i_{r_0+1}$. Autrement dit : $\dim(\operatorname{Im}(f^{r_0})) = \dim(\operatorname{Im}(f^{r_0+1}))$.
De plus, d'après **23** : $\operatorname{Im}(f^{r_0+1}) \subset \operatorname{Im}(f^{r_0})$. Ainsi :

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(f^{r_0+1}) \subset \operatorname{Im}(f^{r_0}) \\ \dim(\operatorname{Im}(f^{r_0})) = \dim(\operatorname{Im}(f^{r_0+1})) \end{cases}$$

On en déduit : $\operatorname{Im}(f^{r_0}) = \operatorname{Im}(f^{r_0+1})$, *i.e.* : $I_{r_0} = I_{r_0+1}$.

- On sait : $k_{s_0} = k_{s_0+1}$. Autrement dit : $\dim(\operatorname{Ker}(f^{s_0})) = \dim(\operatorname{Ker}(f^{s_0+1}))$.
De plus, d'après **23** : $\operatorname{Ker}(f^{s_0+1}) \subset \operatorname{Ker}(f^{s_0})$. Ainsi :

$$\begin{cases} \operatorname{Ker}(f^{s_0+1}) \subset \operatorname{Ker}(f^{s_0}) \\ \dim(\operatorname{Ker}(f^{s_0})) = \dim(\operatorname{Ker}(f^{s_0+1})) \end{cases}$$

On en déduit : $\operatorname{Ker}(f^{s_0}) = \operatorname{Ker}(f^{s_0+1})$, *i.e.* : $K_{s_0} = K_{s_0+1}$.

- On sait alors que r_0 et s_0 sont les plus petits entiers tels que :

$$\begin{cases} I_{r_0} = I_{r_0+1} \\ K_{s_0} = K_{s_0+1} \end{cases}$$

Ainsi, d'après la question **26** : $r_0 = s_0$.

Commentaire

On aurait également pu utiliser le théorème du rang pour démontrer : $r_0 = s_0$.

- Tout d'abord :
 - × l'espace vectoriel E est de dimension finie dans cette question,
 - × l'application f^{r_0} est linéaire.

Par théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim(\operatorname{Ker}(f^{r_0})) & + & \dim(\operatorname{Im}(f^{r_0})) \\ & & \parallel & & \parallel \\ & & k_{r_0} & & i_{r_0} \end{array}$$

- De même :
 - × l'espace vectoriel E est de dimension finie dans cette question,
 - × l'application f^{r_0+1} est linéaire.

Par théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim(\operatorname{Ker}(f^{r_0+1})) & + & \dim(\operatorname{Im}(f^{r_0+1})) \\ & & \parallel & & \parallel \\ & & k_{r_0+1} & & i_{r_0+1} \end{array}$$

- Or : $i_{r_0} = i_{r_0+1}$. Donc :

$$k_{r_0+1} = \dim(E) - i_{r_0+1} = \dim(E) - i_{r_0} = k_{r_0}$$

Comme s_0 est le plus petit entier s tel que : $k_{s+1} = k_s$, on en déduit : $s_0 \leq r_0$.

- On obtient aussi :

$$i_{s_0+1} = \dim(E) - k_{s_0+1} = \dim(E) - k_{s_0} = i_{s_0}$$

Comme r_0 est le plus petit entier r tel que : $i_{r+1} = i_r$, on en déduit : $r_0 \leq s_0$.
On en conclut : $s_0 = r_0$. □

30. En déduire que $E = \operatorname{Ker}(f^{r_0}) \oplus \operatorname{Im}(f^{r_0})$.

Démonstration.

On a démontré en question précédente :

$$\begin{cases} I_{r_0} = I_{r_0+1} \\ K_{s_0} = K_{s_0+1} \end{cases}$$

Ainsi, d'après la question **26** : $E = \operatorname{Ker}(f^{r_0}) \oplus \operatorname{Im}(f^{r_0})$. □

31. On considère, avec les notations de la partie I, $E = \mathbb{R}^3$ et $f = p$. Que valent r_0 et s_0 dans ce cas ?

Démonstration.

- Comme p est un projecteur, alors : $p^2 = p \circ p = p$. On en déduit :

$$\begin{cases} \text{Ker}(p^2) = \text{Ker}(p) \\ \text{Im}(p^2) = \text{Im}(p) \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} k_2 = k_1 \\ i_2 = i_1 \end{cases}$$

On en déduit : $r_0 \leq 1$ et $s_0 \leq 1$.

- De plus :

× d'une part : $\text{Ker}(p^0) = \text{Ker}(\text{id}_E) = \{0_E\}$. Donc : $k_0 = \dim(\text{Ker}(p^0)) = 0$.

Or, d'après la question 10 : $k_1 = 1 \neq k_0$.

Ainsi : $s_0 \neq 0$. Donc : $s_0 \geq 1$.

Or, d'après le point précédent : $s_0 \leq 1$. D'où : $s_0 = 1$.

× d'autre part : $\text{Im}(p^0) = \text{Im}(\text{id}_E) = \mathbb{R}^3$. Donc : $i_0 = \dim(\text{Im}(p^0)) = 3$.

Or, d'après la question 10 : $i_1 = 2 \neq i_0$.

Ainsi : $r_0 \neq 0$. Donc : $r_0 \geq 1$.

Or, d'après le point précédent : $r_0 \leq 1$. D'où : $r_0 = 1$.

Finalement, dans le cas de la partie I : $r_0 = s_0 = 1$.

□