

DS7 /120



On traitera **OBLIGATOIREMENT** l'exercice de cours. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice : Cours /8

1. (*) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

Démontrer :

$$p \circ p = p \quad \Rightarrow \quad E = \text{Ker}(p - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(p)$$

• **2 pts : analyse**

× **1 pt** : $p(x) = u$

× **1 pt** : $v = x - p(x)$

• **3 pts : synthèse**

× **1 pt** : $u_0 \in \text{Ker}(p - \text{id}_E)$

× **1 pt** : $v_0 \in \text{Ker}(p)$

× **1 pt** : $x = u_0 + v_0$

2. (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère l'expérience qui consiste à tirer sans remise dans une urne contenant n boules blanches et 2 boules noires.

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket^2$, on note :

$A_{i,j}$: « obtenir la 1^{ère} boule noire au $i^{\text{ème}}$ tirage et la 2^{nde} au $j^{\text{ème}}$ tirage »

Déterminer $\mathbb{P}(A_{i,j})$.

- **1 pt** : si $i \geq j$, alors : $A_{i,j} = \emptyset$, car... **Donc** : $\mathbb{P}(A_{i,j}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

- **2 pts** : cas $i < j$

× **1 pt** : un $(n+2)$ -tirage réalisant $A_{i,j}$ est entièrement déterminé par...

× **1 pt** : on est en situation d'équiprobabilité, donc : $\mathbb{P}(A_{i,j}) = \frac{\text{Card}(A_{i,j})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$

Problème I /44

3. Dans cette question, et uniquement cette question, f est la fonction $t \mapsto \cos\left(\frac{t}{1+t^2}\right)$.

a) En utilisant un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, donner un équivalent de $\lambda - f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

- **1 pt** : $\frac{t}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$. **Donc** :

$$\lambda - f(t) = \lambda - 1 + \frac{t^2}{2(1+t^2)^2} + \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\right)$$

- **1 pt** : si $\lambda \neq 1$, alors : $\lambda - f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda - 1$

- **1 pt** : si $\lambda = 1$, alors : $\lambda - f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2t^2}$

b) En déduire l'ensemble des valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.

- 1 pt : pour tout $b \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\lambda - f(t)}{t}$ est continue sur le segment $[a, b]$.

L'intégrale $\int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ est donc bien définie.

- 1 pt : si $\lambda < 1$: $-\frac{\lambda - f(t)}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1 - \lambda}{t} \geq 0$.

D'après le Résultat 2, $-I(\lambda)$ n'existe pas, et donc $I(\lambda)$ non plus.

- 0 pt : si $\lambda > 1$, avec un raisonnement similaire, $I(\lambda)$ n'existe pas.

- 1 pt : si $\lambda = 1$, alors : $\frac{1 - f(t)}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2t^3} \geq 0$.

D'après le Résultat 2, $I(1)$ existe.

c) Donner alors un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ lorsque x tend vers l'infini.

- 1 pt : La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est continue sur le SEGMENT $[a, x]$.

L'intégrale $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ est donc bien définie.

- 1 pt : $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt = - \int_a^x \frac{1 - f(t)}{t} dt + \int_a^x \frac{1}{t} dt = \ln(x) - \ln(a) - \int_a^x \frac{1 - f(t)}{t} dt$

- 1 pt : d'après la question précédente :

$$-\ln(a) - \int_a^x \frac{1 - f(t)}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\ln(a) - I(1) = O(1)$$

- 1 pt : $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$

4. On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Prouver que l'on a : $\lambda = \mu$.

- 1 pt : $I(\lambda) - I(\mu)$ existe

- 1 pt : $\int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt - \int_a^b \frac{\mu - f(t)}{t} dt = (\lambda - \mu) (\ln(b) - \ln(a))$

- 1 pt : si $\lambda < \mu$, alors : $\int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt - \int_a^b \frac{\mu - f(t)}{t} dt \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} -\infty$ et $\int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt - \int_a^b \frac{\mu - f(t)}{t} dt \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} I(\lambda) - I(\mu)$.
Absurde !

- 0 pt : si $\lambda > \mu$, alors : $\int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt - \int_a^b \frac{\mu - f(t)}{t} dt \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt - \int_a^b \frac{\mu - f(t)}{t} dt \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} I(\lambda) - I(\mu)$.
Absurde !

5. Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x) = \int_a^x (\lambda - f(t)) dt$.

a) Justifier que H_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $H'_\lambda(x)$.

- 1 pt : La fonction $h_\lambda : t \mapsto \lambda - f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction H_λ est l'unique primitive de h_λ qui s'annule en a . La fonction H_λ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, H'_\lambda(x) = \lambda - f(x)$

b) Démontrer que si H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $I(\lambda)$ existe et : $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$.

- 1 pt : $\int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt = \frac{H_\lambda(b)}{b} + \int_a^b \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$
- 1 pt : $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{H_\lambda(b)}{b} = 0$, car H_λ bornée sur $\mathbb{R}$ et : $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} = 0$
- 1 pt : $\left| \frac{H_\lambda(t)}{t^2} \right| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$
- 1 pt : utilisation du *Résultat 1*
- 1 pt : par passage à la limite quand b tend vers $+\infty$: $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$

6. Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et T -périodique ($T > 0$).

a) Démontrer que la fonction φ qui à tout réel x associe $\varphi(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt$ est constante.

Montrer alors que l'on a, pour tout réel x : $H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \int_0^T f(t) dt$.

• 1 pt : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_x^{x+T} f(t) dt$ est bien définie. Autrement dit, la fonction φ est bien définie.

• 1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \int_0^T f(t) dt$. La fonction φ est donc constante sur $\mathbb{R}$.

• 1 pt : $H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \int_0^T f(t) dt$

b) Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour laquelle la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

• 1 pt : D'après la question précédente appliquée à $x = a + nT : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \lambda T - \int_0^T f(t) dt = r$. La suite (u_n) est donc arithmétique de raison r .

• 1 pt : (u_n) bornée si et seulement si $r = 0$

• 1 pt : $r = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$

c) Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée dans $\mathbb{R}$.

• 1 pt : H_{λ_0} est T -périodique sur $\mathbb{R}$, car...

• 2 pts : H_{λ_0} est bornée sur $\mathbb{R}$

× 1 pt : La fonction H_{λ_0} est continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$. Elle est donc continue sur le segment $[0, T]$. Elle est ainsi bornée sur ce segment.

× 1 pt : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction H_{λ_0} est donc également bornée sur $[kT, (k+1)T]$, par les mêmes bornes, car... Elle est donc bornée sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [kT, (k+1)T] = \mathbb{R}$

d) Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.

• 1 pt : si $\lambda = \lambda_0$, alors d'après la question précédente, la fonction H_{λ_0} est bornée sur $\mathbb{R}$.

D'après la question 5b, on en déduit que $I(\lambda_0)$ existe.

• 1 pt : si $\lambda \neq \lambda_0$, alors on procède par l'absurde. Supposons que $I(\lambda)$ existe.

On sait alors que $I(\lambda)$ et $I(\lambda_0)$ existent. D'après la question 4, on en déduit : $\lambda = \lambda_0$. Absurde !

e) Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ lorsque x tend vers l'infini.

- **2 pts** : si $\lambda_0 \neq 0$: $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_0 \ln(x)$.
(raisonnement similaire à **3c**)

7. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} dt$ et $B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t} dt$.

a) Prouver que A_n existe. On admettra qu'il en est de même pour B_n .

- **1 pt** : la fonction $f_n : t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, car...
- **1 pt** : $\lim_{t \rightarrow 0} nt = 0$, donc : $f_n(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} n$.

Comme f_n admet une limite finie en 0, alors elle prolongeable par continuité en 0.

b) Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$.

- **1 pt** : $\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t}{6}$

c) Démontrer que la suite $(A_n - B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

- **1 pt** : $|A_n - B_n| \leq \int_0^{\pi/2} \left| \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right| dt$
- **1 pt** : la fonction $h : t \mapsto \left| \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right|$ est prolongeable par continuité sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

L'intégrale $\int_0^{\pi/2} h(t) dt$ est donc bien définie.

d) On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.

(i) Donner un équivalent de B_n lorsque n tend vers l'infini. On pourra utiliser les résultats établis à la question **6**.

- **1 pt** : $B_n = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du$ (avec le changement de variable $\boxed{u = nt}$)
- **1 pt** : $B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$
- **2 pts** : hypothèses de la question **6** à la fonction $f : t \mapsto |\sin(t)|$ pour démontrer :
 × **1 pt** : la fonction f est continue et π -périodique sur $\mathbb{R}$
 × **1 pt** : $\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt = \frac{2}{\pi} \neq 0$
- **1 pt** : d'après **6e** : $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_0 \ln(x) = \frac{2}{\pi} \ln(x)$.

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\pi}{2} = +\infty$. Donc : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(n)$

Ainsi : $B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(n)$

(ii) En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.

- **1 pt** : d'après la question **7c**, la suite $(A_n - B_n)$ est bornée
- **1 pt** : $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(n)$

Problème II /68

Dans tout ce problème, lorsque E est un espace vectoriel et f un endomorphisme de E , on rappelle que $f^0 = \text{id}_E$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f^n \circ f = f \circ f^n$.

Partie I : Un projecteur

On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et l'application :

$$p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right)$$

On note $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, -1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, -1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

8. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- 1 pt : la famille $\mathcal{B}$ est libre. En effet...
- 1 pt : La famille $\mathcal{B}$ est libre (d'après ce qui précède) et vérifie : $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

9. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

- 1 pt : p est linéaire
- 2 pts : $p \circ p = p$

10. Déterminer une base puis la dimension du noyau de p . En déduire le rang de p .

- 4 pts : la famille $\mathcal{F}_0 = ((1, 1, 1))$ est une base de $\text{Ker}(p)$ et : $\dim(\text{Ker}(p)) = 1$.

$$\times \text{ 1 pt : } u \in \text{Ker}(p) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\times \text{ 1 pt : } u \in \text{Ker}(p) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 6z \\ 3y = 3z \end{cases}$$

$$\times \text{ 1 pt : } \text{Ker}(p) = \text{Vect}((1, 1, 1))$$

- 1 pt : La famille $\mathcal{F}_0 = ((1, 1, 1))$ est donc génératrice de $\text{Ker}(p)$ (d'après ce qui précède) et libre (car elle est constituée uniquement d'un vecteur, qui est non nul). C'est donc une base de $\text{Ker}(p)$. Donc :

$$\dim(\text{Ker}(p)) = \text{Card}(\mathcal{F}_0) = 1$$

- 1 pt : théorème du rang pour conclure : $\text{rg}(p) = 2$

11. Démontrer : $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

- 1 pt : d'après la question précédente :

$$\dim(\text{Ker}(p)) + \dim(\text{Im}(p)) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

- 2 pts : $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (1 pt par inclusion)

Partie II : Un exemple

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

et on note u l'application linéaire canoniquement associée à A :

$$\begin{aligned} u : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

12. Montrer que $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

• **1 pt** : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

13. Justifier : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$. A-t-on : $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$?

• **1 pt** : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(u)$

• **3 pts** : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Im}(u)$

× **1 pt** : caractérisation de l'image d'une application linéaire en dimension finie

× **1 pt** : $\text{Im}(u) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$ (car : $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$)

× **1 pt** : d'après la question précédente :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right) = \text{Im}(u)$$

• **1 pt** : $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})}\}$. On en conclut : $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \neq \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

14. Calculer A^2 .

• **1 pt** : $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

15. Déterminer une base de $\text{Ker}(u^2)$ et une base de $\text{Im}(u^2)$.

• **1 pt** : $X \in \text{Ker}(u^2) \Leftrightarrow A^2 X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2z \end{cases}$

• **1 pt** : $\text{Ker}(u^2) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

• **1 pt** : la famille $\mathcal{G}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Ker}(u^2)$ car...

- **1 pt : caractérisation de l'image d'une application linéaire en dimension finie pour démontrer :**

$$\text{Im}(u^2) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

- **1 pt : la famille $\mathcal{G}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Im}(u^2)$ car...**

16. Montrer que $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) = \text{Ker}(u^2) \oplus \text{Im}(u^2)$.

- **1 pt : la famille $\mathcal{B}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre**
- **1 pt : la famille $\mathcal{B}_0$ est libre (d'après ce qui précède) et vérifie : $\text{Card}(\mathcal{B}_0) = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}))$. C'est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.**
- **1 pt : la concaténation d'une base de $\text{Ker}(u^2)$ et d'une base de $\text{Im}(u^2)$ forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$. On en conclut : $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) = \text{Ker}(u^2) \oplus \text{Im}(u^2)$.**

Partie III : Carré de f

Soit f un endomorphisme quelconque de E .

17. Montrer : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

- **1 pt : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$**
- **1 pt : $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$**

18. On suppose dans cette question : $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ tel que $f(x) = f^2(x')$ puis que $x - f(x') \in \text{Ker}(f)$. En déduire que $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$.

- **1 pt : pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ tel que $f(x) = f^2(x')$**
- **1 pt : $x - f(x') \in \text{Ker}(f)$**
- **1 pt : $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$, car... (notamment écriture : $x = (x - f(x')) + f(x')$)**

19. Montrer que si $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$ alors : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$.

- **2 pts**

20. Dédurre des questions précédente l'équivalence :

$$E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \Leftrightarrow \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$$

- **2 pts : 1 pt par implication**

21. Montrer de la même manière l'équivalence :

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$$

- **2 pts : si $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$, alors : $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$**
- **2 pts : si $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$, alors : $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$**

22. Conclure : $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ si et seulement si $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$.

- **1 pt**

Partie IV : Suites des noyaux et des images de f^k et décomposition de E

Dans la suite, on considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E quelconque et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$K_n = \text{Ker}(f^n) \quad \text{et} \quad I_n = \text{Im}(f^n) \quad \text{puis} \quad k_n = \dim(K_n) \quad \text{et} \quad i_n = \dim(I_n)$$

(lorsque K_n ou I_n ne sont pas de dimension finie, on pose respectivement $k_n = +\infty$ ou $i_n = +\infty$).

23. En procédant comme dans la question 17, montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $K_n \subset K_{n+1}$ et $I_{n+1} \subset I_n$.

- 1 pt : $K_n \subset K_{n+1}$
- 1 pt : $I_{n+1} \subset I_n$

24. On suppose dans cette question qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $K_s = K_{s+1}$. Montrer que $K_s = K_{s+2}$ puis que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq s$:

$$K_s = K_m$$

- 1 pt : $K_{s+2} = K_{s+1} = K_s$
- 3 pts : $\forall m \in \llbracket s, +\infty \rrbracket, K_s = K_m$
 - × 1 pt : initialisation
 - × 2 pts : hérédité

25. On suppose dans cette question qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $I_r = I_{r+1}$. Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq r$:

$$I_r = I_m$$

- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité

26. On suppose dans cette question qu'il existe $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ tel que $I_r = I_{r+1}$ et $K_s = K_{s+1}$. On note s_0 et r_0 les plus petits entiers r, s respectifs tels que $I_{r_0} = I_{r_0+1}$ et $K_{s_0} = K_{s_0+1}$. Montrer : $r_0 = s_0$; et :

$$E = \text{Ker}(f^{r_0}) \oplus \text{Im}(f^{r_0})$$

- 4 pts : $r_0 = s_0$
Tout apport pertinent sera valorisé.
- 1 pt : D'après 25 et 24 : $\begin{cases} \text{Im}(f^{2r_0}) = \text{Im}(f^{r_0}) \\ \text{Ker}(f^{2r_0}) = \text{Ker}(f^{r_0}) \end{cases}$
Ainsi, d'après 22 appliquée à f^{r_0} , on obtient : $E = \text{Ker}(f^{r_0}) \oplus \text{Im}(f^{r_0})$

Partie V : Cas où E est de dimension finie

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension finie.

27. Montrer que $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites d'entiers et déterminer leurs monotonies.

- 1 pt : les suites (k_n) et (i_n) sont des suites d'entiers, car...
- 1 pt : d'après 23, la suite (k_n) est croissante et la suite (i_n) est décroissante

28. Justifier que les suites $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées et qu'il existe $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k_r = k_{r+1}$ et $i_s = i_{s+1}$.

- 1 pt : es suites $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées, car...
- 2 pts : il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que : $k_r = k_{r+1}$
 - × 1 pt : la suite (k_n) est croissante (d'après la question précédente) et majorée par $\dim(E)$ (d'après le point précédent). Elle est donc convergente.
 - × 1 pt : la suite (k_n) est une suite d'entiers convergente. Elle est donc stationnaire.
- 0 pt : il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que : $i_s = i_{s+1}$

29. Notons r_0, s_0 les plus petits entiers naturels tel que $i_r = i_{r+1}$ et $k_s = k_{s+1}$. Montrer que $r_0 \leq \dim(E)$ et $s_0 \leq \dim(E)$ et que $r_0 = s_0$.

- 1 pt : $r_0 \leq \dim(E)$ et $s_0 \leq \dim(E)$
- 1 pt : $I_{r_0} = I_{r_0+1}$
- 0 pt : $K_{s_0} = K_{s_0+1}$
- 1 pt : d'après 26 : $r_0 = s_0$.

30. En déduire que $E = \text{Ker}(f^{r_0}) \oplus \text{Im}(f^{r_0})$.

- 1 pt : On a démontré en question précédente :

$$\begin{cases} I_{r_0} = I_{r_0+1} \\ K_{s_0} = K_{s_0+1} \end{cases}$$

Ainsi, d'après la question 26 : $E = \text{Ker}(f^{r_0}) \oplus \text{Im}(f^{r_0})$

31. On considère, avec les notations de la partie I, $E = \mathbb{R}^3$ et $f = p$. Que valent r_0 et s_0 dans ce cas ?

- 1 pt : Comme p est un projecteur, alors : $p^2 = p \circ p = p$. On en déduit :

$$\begin{cases} k_2 = k_1 \\ i_2 = i_1 \end{cases}$$

Ainsi : $r_0 \leq 1$ et $s_0 \leq 1$.

- 1 pt : $s_0 \neq 0$, donc $s_0 \geq 1$
- 1 pt : $r_0 \neq 0$, donc $r_0 \geq 1$