

DS7



On traitera **OBLIGATOIREMENT** l'exercice de cours. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice : Cours

1. (*) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

Démontrer :

$$p \circ p = p \quad \Rightarrow \quad E = \text{Ker}(p - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(p)$$

2. (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère l'expérience qui consiste à tirer sans remise dans une urne contenant n boules blanches et 2 boules noires.

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket^2$, on note :

$A_{i,j}$: « obtenir la 1^{ère} boule noire au $i^{\text{ème}}$ tirage et la 2^{nde} au $j^{\text{ème}}$ tirage »

Déterminer $\mathbb{P}(A_{i,j})$.

Problème I

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout λ réel, on pose $I(\lambda) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$, lorsque cela existe. On note alors :

$$I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$$

On rappelle que, si une fonction f est prolongeable par continuité sur le segment $[a, b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est bien définie.

Enfin, on pourra utiliser les résultats suivants sans démonstration.

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

- Résultat 1 : Supposons qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$\times \quad \forall t \in [a, +\infty[, |f(t)| \geq 0 \text{ et } \frac{1}{t^\alpha} \geq 0$$

$$\times \quad |f(t)| = O_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^\alpha} \right).$$

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$ existe.

- Résultat 2 : Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\times \quad f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{t^\alpha} \geq 0.$$

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$ existe **si et seulement si** : $\alpha > 1$.

3. Dans cette question, et uniquement cette question, f est la fonction $t \mapsto \cos\left(\frac{t}{1+t^2}\right)$.
- a) En utilisant un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, donner un équivalent de $\lambda - f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.
- b) En déduire l'ensemble des valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.
- c) Donner alors un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ lorsque x tend vers l'infini.
4. On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Prouver que l'on a : $\lambda = \mu$.
5. Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x) = \int_a^x (\lambda - f(t)) dt$.
- a) Justifier que H_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $H'_\lambda(x)$.
- b) Démontrer que si H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $I(\lambda)$ existe et : $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$.
6. Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et T -périodique ($T > 0$).
- a) Démontrer que la fonction φ qui à tout réel x associe $\varphi(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt$ est constante.
- Montrer alors que l'on a, pour tout réel x : $H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \int_0^T f(t) dt$.
- b) Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour laquelle la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- c) Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée dans $\mathbb{R}$.
- d) Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.
- e) Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ lorsque x tend vers l'infini.
7. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} dt$ et $B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t} dt$.
- a) Prouver que A_n existe. On admettra qu'il en est de même pour B_n .
- b) Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$.
- c) Démontrer que la suite $(A_n - B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.
- d) On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.
- (i) Donner un équivalent de B_n lorsque n tend vers l'infini. On pourra utiliser les résultats établis à la question 6.
- (ii) En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.

Problème II

Dans tout ce problème, lorsque E est un espace vectoriel et f un endomorphisme de E , on rappelle que $f^0 = \text{id}_E$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f^n \circ f = f \circ f^n$.

Partie I : Un projecteur

On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et l'application :

$$p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right)$$

On note $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, -1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, -1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

8. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

9. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

10. Déterminer une base puis la dimension du noyau de p . En déduire le rang de p .

11. Démontrer : $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

Partie II : Un exemple

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

et on note u l'application linéaire canoniquement associée à A :

$$u : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \\ X \mapsto AX$$

12. Montrer que $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

13. Justifier : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$. A-t-on : $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$?

14. Calculer A^2 .

15. Déterminer une base de $\text{Ker}(u^2)$ et une base de $\text{Im}(u^2)$.

16. Montrer que $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) = \text{Ker}(u^2) \oplus \text{Im}(u^2)$.

Partie III : Carré de f

Soit f un endomorphisme quelconque de E .

17. Montrer : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

18. On suppose dans cette question : $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ tel que $f(x) = f^2(x')$ puis que $x - f(x') \in \text{Ker}(f)$. En déduire que $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$.

19. Montrer que si $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$ alors : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$.

20. Dédurre des questions précédente l'équivalence :

$$E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \Leftrightarrow \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$$

21. Montrer de la même manière l'équivalence :

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$$

22. Conclure : $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ si et seulement si $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$.

Partie IV : Suites des noyaux et des images de f^k et décomposition de E

Dans la suite, on considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E quelconque et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$K_n = \text{Ker}(f^n) \text{ et } I_n = \text{Im}(f^n) \text{ puis } k_n = \dim(K_n) \text{ et } i_n = \dim(I_n)$$

(lorsque K_n ou I_n ne sont pas de dimension finie, on pose respectivement $k_n = +\infty$ ou $i_n = +\infty$).

23. En procédant comme dans la question **17**, montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $K_n \subset K_{n+1}$ et $I_{n+1} \subset I_n$.

24. On suppose dans cette question qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $K_s = K_{s+1}$. Montrer que $K_s = K_{s+2}$ puis que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq s$:

$$K_s = K_m$$

25. On suppose dans cette question qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $I_r = I_{r+1}$. Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq r$:

$$I_r = I_m$$

26. On suppose dans cette question qu'il existe $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ tel que $I_r = I_{r+1}$ et $K_s = K_{s+1}$. On note s_0 et r_0 les plus petits entiers r, s respectifs tels que $I_{r_0} = I_{r_0+1}$ et $K_{s_0} = K_{s_0+1}$. Montrer : $r_0 = s_0$; et :

$$E = \text{Ker}(f^{r_0}) \oplus \text{Im}(f^{r_0})$$

Partie V : Cas où E est de dimension finie

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension finie.

27. Montrer que $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites d'entiers et déterminer leurs monotonies.

28. Justifier que les suites $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées et qu'il existe $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k_r = k_{r+1}$ et $i_s = i_{s+1}$.

29. Notons r_0, s_0 les plus petits entiers naturels tel que $i_r = i_{r+1}$ et $k_s = k_{s+1}$. Montrer que $r_0 \leq \dim(E)$ et $s_0 \leq \dim(E)$ et que $r_0 = s_0$.

30. En déduire que $E = \text{Ker}(f^{r_0}) \oplus \text{Im}(f^{r_0})$.

31. On considère, avec les notations de la partie I, $E = \mathbb{R}^3$ et $f = p$. Que valent r_0 et s_0 dans ce cas ?