CH VII : Suites numériques

I. L'ensemble $\mathbb{R}$

I.1. Propriétés des lois + et $\times$

On **admet** l'existence de l'ensemble des nombres réels, que l'on note $\mathbb{R}$. On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de deux lois internes + et $\times$.

Proposition 1. (Propriétés de + et $\times$)

Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

1) *Associativité de + :*

$$\boxed{(x_1 + x_2) + x_3 \ = \ x_1 + (x_2 + x_3) \ = \ x_1 + x_2 + x_3}$$

2) *Commutativité de + :*

$$\boxed{x_1 + x_2 \ = \ x_2 + x_1}$$

3) *Élement neutre pour + :* 0 *est l'élément neutre pour la loi +.*

$$0 + x \ = \ x + 0 \ = \ x$$

4) *Opposé pour + : tout* $x \in \mathbb{R}$ *admet un opposé pour la loi +, noté* $-x$.

$$x + (-x) \ = \ (-x) + x \ = \ 0$$

5) *Associativité de $\times$:*

$$\boxed{(x_1 \times x_2) \times x_3 \ = \ x_1 \times (x_2 \times x_3) \ = \ x_1 \times x_2 \times x_3}$$

6) *Commutativité de $\times$:*

$$\boxed{x_1 \times x_2 \ = \ x_2 \times x_1}$$

7) *Élement neutre pour $\times$:* 1 *est l'élément neutre pour la loi $\times$.*

$$1 \times x \ = \ x \times 1 \ =$$

8) *Inverse pour $\times$: tout* $x \in \mathbb{R}^*$ *admet un inverse pour la loi $\times$, noté* $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

$$x \times \frac{1}{x} \ = \ \frac{1}{x} \times x \ = \ 1$$

9) *Distributivité de $\times$ sur + :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x_1 \times (x_2 + x_3) & = & x_1 \times x_2 + x_1 \times x_3 \\ \textit{et} \quad (x_1 + x_2) \times x_3 & = & x_1 \times x_3 + x_2 \times x_3 \end{array}}$$

10) *Intégrité :*

$$\boxed{(x_1 \times x_2 = 0) \ \Leftrightarrow \ (x_1 = 0 \ \texttt{OU} \ x_2 = 0)}$$

Remarque

Pour la culture :

- un ensemble muni de deux lois internes + et $\times$ vérifiant les propriétés ***1)***, ***2)***, ***3)***, ***4)***, ***5)***, ***7)***, ***9)*** est appelé *anneau (unitaire)*.
- si cet ensemble vérifie en plus ***6)***, alors l'anneau est dit *commutatif*.
- si, en plus de tout cela, l'ensemble vérifie la propriété ***8)*** (*i.e.* l'ensemble vérifie les propriétés ***1)*** à ***9)***), alors cet ensemble est appelé un *corps*.
- enfin, un ensemble vérifiant toutes les propriétés de ***1)*** à ***10)*** est appelé un corps *intègre*.

I.2. Comparaison de réels

I.2.a) Notion d'ordre total dans $\mathbb{R}$

On rappelle que l'ensemble des réels est la réunion de deux sous-ensembles :

- l'ensemble $\mathbb{R}_-$ des réels négatifs ou nuls,
- l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des réels positifs ou nuls.

Notons que le réel 0 appratient à chacun de ses sous-ensembles. Et même, plus précisément : $\mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}$.

Définition

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- On dit que a est **inférieur ou égal** à b, et on note $a \leqslant b$ si et seulement si : $a - b \in \mathbb{R}_-$.

$$\boxed{a \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad a - b \in \mathbb{R}_-}$$

- On dit que a est **supérieur ou égal** à b, et on note $a \geqslant b$ si et seulement si : $a - b \in \mathbb{R}_+$.

$$\boxed{a \geqslant b \quad \Leftrightarrow \quad a - b \in \mathbb{R}_+}$$

- On dit que a est **strictement inférieur** à b, et on note $a < b$ si et seulement si : $a - b \in \mathbb{R}_-^*$.

$$\boxed{a < b \quad \Leftrightarrow \quad a - b \in \mathbb{R}_-^*}$$

- On dit que a est **strictement supérieur** à b, et on note $a > b$ si et seulement si : $a - b \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{a > b \quad \Leftrightarrow \quad a - b \in \mathbb{R}_+^*}$$

On rappelle que l'ensemble $\mathbb{C}$ ne possède pas de relation d'ordre total. Il n'y a donc pas de sens à écrire des inégalités entre nombres complexes (non réels).

Proposition 2.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

1) Réflexivité : $\boxed{a \leqslant a}$

2) Antisymétrie :

$$\boxed{(a \leqslant b \ \texttt{ET} \ b \leqslant a) \quad \Rightarrow \quad (a = b)}$$

3) Transitivité :

$$\boxed{(a \leqslant b \ \texttt{ET} \ b \leqslant c) \quad \Rightarrow \quad (a \leqslant c)}$$

Remarque

De façon général, un opérateur binaire $\blacksquare$ sur un ensemble E vérifiant les propriétés suivantes pour tout $(a, b, c) \in E^3$:

1) Réflexivité : $a \blacksquare a$

2) Antisymétrie :

$$(a \blacksquare b \ \texttt{ET} \ b \blacksquare a) \quad \Rightarrow \quad (a = b)$$

3) Transitivité :

$$(a \blacksquare b \ \texttt{ET} \ b \blacksquare c) \quad \Rightarrow \quad (a \blacksquare c)$$

est appelée une **relation d'ordre**.

I.2.b) Règles de calculs

Proposition 3.

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

1) Compatibilité avec l'addition :

$$\boxed{(a \leqslant b \;\; \texttt{ET} \;\; c \leqslant d) \quad \Rightarrow \quad (a+c \leqslant b+d)}$$

2) Multiplication par un réel positif :

$$\boxed{(a \leqslant b \;\; \texttt{ET} \;\; 0 \leqslant c) \quad \Rightarrow \quad (ac \leqslant bc)}$$

3) Multiplication par un réel négatif :

$$\boxed{(a \leqslant b \;\; \texttt{ET} \;\; c \leqslant 0) \quad \Rightarrow \quad (ac \geqslant bc)}$$

4) Multiplication de réels positifs :

$$\boxed{(0 \leqslant a \leqslant b \;\; \texttt{ET} \;\; 0 \leqslant c \leqslant d) \quad \Rightarrow \quad (0 \leqslant ac \leqslant bd)}$$

En particulier : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (0 \leqslant a \leqslant b) \ \Rightarrow\ (0 \leqslant a^n \leqslant b^n)}$.

Exercice 1

L'assertion suivante est-elle vraie ?

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \qquad (a \leqslant b \;\; \texttt{ET} \;\; 0 \leqslant c \leqslant d) \quad \Rightarrow \quad (ac \leqslant bd)$$

Proposition 4.

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

1) Compatibilité avec l'addition :

$$\boxed{(a \leqslant b \;\; \texttt{ET} \;\; c < d) \quad \Rightarrow \quad (a+c < b+d)}$$

2) Multiplication par un réel positif :

$$\boxed{(a < b \;\; \texttt{ET} \;\; 0 < c) \quad \Rightarrow \quad (ac < bc)}$$

3) Multiplication par un réel négatif :

$$\boxed{(a < b \;\; \texttt{ET} \;\; c < 0) \quad \Rightarrow \quad (ac > bc)}$$

4) Multiplication de réels positifs :

$$\boxed{(0 \leqslant a < b \;\; \texttt{ET} \;\; 0 \leqslant c < d) \quad \Rightarrow \quad (0 \leqslant ac < bd)}$$

En particulier : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (0 \leqslant a < b) \ \Rightarrow\ (0 \leqslant a^n < b^n)}$.

I.3. L'ordre et les parties de $\mathbb{R}$

I.3.a) Majorant, minorant

Définition

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que le réel M est un **majorant** de E si : $\boxed{\forall x \in E,\ x \leqslant M}$
- On dit que le réel m est un **minorant** de E si : $\boxed{\forall x \in E,\ x \geqslant m}$

⚠

- Toute partie de $\mathbb{R}$ n'admet pas forcément de minorant ou de majorant. Par exemple :
  × l'ensemble $[1, +\infty[$ n'admet pas de majorant,
  × l'ensemble $]-\infty, 2[$ n'admet pas de minorant,
  × l'ensemble $\mathbb{R}$ n'admet ni majorant ni minorant.
- Lorsqu'une partie A est majorée (resp. minorée), alors elle admet une infinité de majorants (resp. minorants). Par exemple, la partie $[0, 3]$ est majorée par 3, π, 47...

Définition

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que la partie E est **majorée** si elle admet un majorant.
- On dit que la partie E est **minorée** si elle admet un minorant.
- On dit que la partie E est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

I.3.b) Maximum, minimum

Définition

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

- Le réel M est le **maximum** (ou **le plus grand élément**) de l'ensemble E, noté $\max(E)$, si :
  × M est un majorant de E,
  × $M \in E$.
- Le réel m est le **minimum** (ou **le plus petit élément**) de l'ensemble E, noté $\min(E)$, si :
  × m est un minorant de E,
  × $m \in E$.

Proposition 5.

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

Le maximum (resp. le minimum) de E, s'il existe, est unique.

Exemples

- Le sous-ensemble $[0, 1[$ est borné.
  × Le minimum de cet ensemble est 0. *(il est minorée par tout réel inférieur ou égal à 0)*
  × Cet ensemble n'admet pas de maximum. *(mais il est majorée par tout réel supérieur ou égal à 1)*
- L'ensemble $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est borné.
  × Cet ensemble n'admet pas de minimum. *(mais il est minorée par tout réel inférieur ou égal à 0)*
  × Le maximum de cet ensemble est 1. *(il est majorée par tout réel supérieur ou égal à 1)*

I.3.c) Borne supérieure, borne inférieure

Exercice 2

1. Représenter l'ensemble des majorants (resp. l'ensemble des minorants) de l'intervalle $[0, 1[$ en prenant soin d'indiquer si les bornes sont incluses ou non dans ces ensembles.

2. Représenter l'ensemble des majorants (resp. l'ensemble des minorants) de l'ensemble $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ en prenant soin d'indiquer si les bornes sont incluses ou non dans ces ensembles.

3. Les ensembles des majorants (resp. des minorants) ainsi tracés admettent-ils un plus petit élément (resp. un plus grand élément) ?

Définition

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- Supposons que E est **majoré**. Si l'ensemble des majorants de E admet un plus petit élément A, alors cet élément est appelé la **borne supérieure** de l'ensemble E, noté $\sup(E)$.
- Supposons que E n'est pas majoré, alors, par convention : $\sup(E) = +\infty$.

Définition

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- Supposons que E est **minoré**. Si l'ensemble des minorants de E admet un plus grand élément a, alors cet élément est appelé la **borne inférieure** de l'ensemble E, noté $\inf(E)$.
- Supposons que E n'est pas minoré, alors, par convention : $\inf(E) = -\infty$.

Exercice 3

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

Supposons que E possède un maximum. Démontrer qu'elle admet alors une borne supérieure et : $\max(E) = \sup(E)$.

Proposition 6.

1) *Tout sous-ensemble* **non vide** *et* **majoré** *de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*

2) *Tout sous-ensemble* **non vide** *et* **minoré** *de* $\mathbb{R}$ *admet une borne inférieure.*

Proposition 7. (Caractérisation de la borne sup)

Soit E une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

On note : $\alpha = \sup(E)$.

Le réel α est le plus petit des majorants de E. Autrement dit :

$$\boxed{\alpha = \sup(E) \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \forall x \in E,\ x \leqslant \alpha \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in E,\ \alpha - \varepsilon < x_0 \end{array}\right.}$$

Proposition 8. (Caractérisation de la borne inf)

Soit E une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.

On note : $\beta = \inf(E)$.

Le réel β est le plus grand des minorants de E. Autrement dit :

$$\boxed{\beta = \inf(E) \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \forall x \in E,\ x \geqslant \beta \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in E,\ \beta + \varepsilon > x_0 \end{array}\right.}$$

Exercice 4

On note $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonction continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On note également :

$$\|f\|_\infty \;=\; \sup\Big(|f|\big([0,1]\big)\Big)$$

On trouvera aussi parfois la notation :

$$\|f\|_\infty \;=\; \sup_{x\in[0,1]} \left(|f(x)|\right)$$

1. Démontrer que, pour tout $f \in E$, la quantité $\|f\|_\infty$ est bien définie.

2. Démontrer, pour tout $f \in E$: $\|f\|_\infty \geqslant 0$.

3. Soit $f \in E$. Démontrer :

$$\|f\|_\infty \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad \forall x \in [0,1],\ f(x) = 0$$

4. Démontrer :

$$\forall f \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\quad \|\lambda f\|_\infty \;=\; |\lambda|\,\|f\|_\infty$$

5. Démontrer, pour tout $(f,g) \in E^2$:

$$\|f+g\|_\infty \;\leqslant\; \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

6. Connaissez-vous des applications, autres que $\|\cdot\|_\infty$, vérifiant les propriétés démontrées dans les questions ***2.***, ***3.***, ***4.*** et ***5.***

I.4. Quelques sous-ensembles de $\mathbb{R}$ particuliers

I.4.a) Les intervalles

Définition

- On appelle **droite numérique achevée** et on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on adjoint deux éléments notés $-\infty$ et $+\infty$.
- On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'une relation d'ordre totale en prolongeant la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$ et en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty \ < \ x \ < \ +\infty$$

Définition
On dit d'une partie $\mathbb{R}$ est un **intervalle** lorsqu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$ vérifiant :

$$\boxed{\begin{array}{cccccc} \varnothing, & \mathbb{R}, & [a, b], &]a, b[, & [a, b[, &]a, b] \\ [a, +\infty[, &]a, +\infty[, &]-\infty, b], &]b, \infty[& & \end{array}}$$

Proposition 9.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a \leqslant b$.

1) $[a, b] = \{t\, a + (1-t)\, b \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$

2) $]a, b[= \{t\, a + (1-t)\, b \mid 0 < t < 1\}$

3) $]a, b] = \{t\, a + (1-t)\, b \mid 0 < t \leqslant 1\}$

4) $[a, b[= \{t\, a + (1-t)\, b \mid 0 \leqslant t < 1\}$

Définition
Soit C une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que C est **convexe** si :

$$\boxed{\forall (a, b) \in C^2, \qquad (a \leqslant b) \ \Rightarrow \ [a, b] \in C}$$

Proposition 10.
Une partie C de $\mathbb{R}$ est donc convexe si et seulement si :

$$\boxed{\forall (a, b) \in C^2, \ \forall t \in [0, 1], \ t\, a + (1-t)\, b \in C}$$

Théorème 1.
Les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Exercice 5

1. Démontrer que l'intersection d'une famille d'intervalles est un intervalle.

2. Est-ce que l'union d'intervalles est un intervalle ?

I.4.b) Les entiers

Définition (Axiomatique de Peano) On définit l'ensemble des entiers naturels, et on note $\mathbb{N}$, l'ensemble défini par les axiomes suivants :

1) L'ensemble possède un élément particulier que l'on note 0.

2) Tout entier naturel n admet un unique successeur qui est un entier naturel.

3) L'entier 0 n'est le successeur d'aucun élément.

4) Deux entiers naturels admettant le même successeur sont égaux.

5) Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est $\mathbb{N}$.

Proposition 11.
L'ensemble $\mathbb{N}$:

× *est minoré,*

× *admet un plus petit élément :* 0*,*

× *n'est pas majoré.*

Définition
On définit l'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$ par :

$$\boxed{\mathbb{Z} \ = \ \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}}$$

Proposition 12.
L'ensemble Z n'est ni majoré, ni minoré.

Proposition 13.
1) *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*
2) ***a)*** *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.*
b) *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.*

I.4.c) Les rationnels

Définition
On définit l'ensemble des rationnels, noté $\mathbb{Q}$ par :

$$\boxed{\mathbb{Q} \ = \ \left\{\frac{a}{b} \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\right\}}$$

Proposition 14.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Alors $r = \frac{\lfloor 10^n\, x \rfloor}{10^n} \in \mathbb{Q}$ est une approximation par défaut de x à la précision 10^{-n}.

Démonstration.

- Il s'agit de démontrer :

$$0 \ \leqslant \ x - r \ \leqslant \ 10^{-n}$$

- Par définition de la partie entière :

$$\begin{array}{lccccc}
 & 10^n\,x - 1 & < & \lfloor 10^n\,x \rfloor & \leqslant & 10^n\,x \\
\text{donc} & x - \dfrac{1}{10^n} & < & \dfrac{\lfloor 10^n\,x \rfloor}{10^n} & \leqslant & x \qquad (\textit{car } 10^n \geqslant 0) \\
\text{d'où} & x - 10^{-n} & < & r & \leqslant & x \\
\text{ainsi} & -10^{-n} & < & r - x & \leqslant & 0 \\
\text{alors} & 10^{-n} & > & x - r & \geqslant & 0
\end{array}$$

□

Proposition 15.
L'ensemble $\mathbb{R}$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists r \in \mathbb{Q}, \ -\varepsilon < x - r < \varepsilon$$

On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (ou que $\mathbb{R}$ est archimédien).

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$.

- D'après la proposition précédente, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le rationnel $\dfrac{\lfloor 10^n\,x \rfloor}{10^n}$ est une approximation par défaut de x à 10^{-n} près. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \ \leqslant \ x - \frac{\lfloor 10^n\,x \rfloor}{10^n} \ \leqslant \ 10^{-n}$$

- Or, comme $\dfrac{1}{10} \in \,]-1,1[$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} 10^{-n} = 0$. On en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$: $10^{-n} < \varepsilon$.
On en conclut, par transitivité :

$$0 \ \leqslant \ x - \frac{\lfloor 10^N\,x \rfloor}{10^N} \ \leqslant \ 10^{-N} \ \leqslant \ \varepsilon$$

- On pose alors : $r = \dfrac{\lfloor 10^N x \rfloor}{10^N}$. On sait :
  - × d'une part : $r \in \mathbb{Q}$,
  - × d'autre part : $0 \leqslant x - r < \varepsilon$. D'où, par transitivité :

$$-\varepsilon \ < \ 0 \ \leqslant \ x - r \ < \ \varepsilon$$

□

Remarque

- On peut déterminer explicitement N.
- On peut reformuler la proposition précédente sous la forme : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut toruver un rationnel aussi proche que l'on veut de x.

II. Notion de suite

II.1. Définition générale

Définition

Une **suite** de numérique u est une **application** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$ *i.e.* une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) telle que tout élément $n \in \mathbb{N}$ possède une image par u.

$$\boxed{\begin{array}{cccc} u & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{K} \\ & & n & \mapsto & u(n) \end{array}}$$

Notation

- On utilisera la notation u_n pour représenter $u(n)$, l'image de l'application u au point n.
- Pour cet élément u_n, on préférera parler de valeur de la suite au rang n ou encore de **terme général de la suite**.
- Une telle application u sera généralement notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou tout simplement (u_n).

Remarque

On pourra aussi considérer des suites :

× définies seulement à partir du rang 1

$$\begin{array}{ccccc} u & : & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & n & \mapsto & \dfrac{1}{n} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} v & : & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & n & \mapsto & \ln(n) \end{array}$$

× définies seulement à partir du rang 2 : $(\ln(n-1))_{n\geqslant 2}$

× définies seulement à partir du rang m (pour $m \in \mathbb{N}$) : $\left(\dfrac{1}{n-(m-1)}\right)_{n\geqslant m}$

II.2. Comment définir une suite ?

a) Par formule explicite

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5n + 3i$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2.7^n$

b) Par formule récurrente

- $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & u_n + 5 \end{array}\right.$
  (cette suite est arithmétique, cf plus loin)
- $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & 7\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{7}} \times u_n \end{array}\right.$
  (cette suite est géométrique, cf plus loin)
- $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & -\sqrt{2} \\ u_1 & = & 2\ln(3) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} & = & 7 \times u_{n+1} - 4u_n \end{array}\right.$
  (cette suite est dite récurrente linéaire d'ordre 2*, cf plus loin)*
- $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 8 \\ u_1 & = & 10 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} & = & 7\ln(u_{n+1}) + \frac{4}{u_n} + 1 \end{array}\right.$
  (cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique ...)

c) Par restriction sur $\mathbb{N}$ d'une fonction réelle

- $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x \times \mathrm{e}^{-\sqrt{|x|}} \end{array}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n) = n \times \mathrm{e}^{-\sqrt{|n|}}$

Évidemment, ce type de définition n'est possible que si la fonction f est définie sur un ensemble qui inclut $\mathbb{N}$.
On obtient ainsi une formule explicite pour la suite.

II.3. Propriétés - vocabulaire

II.3.a) Sens de variation

Une suite est croissante si elle définit une fonction croissante.

$$(u_n) \text{ croissante } \quad \Leftrightarrow \quad (\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (m \leqslant n \Rightarrow u_m \leqslant u_n))$$

On utilise en fait la définition suivante qui tire partie des propriétés de $\mathbb{N}$.

Définition *(Sens de variation des suites)*

- Une suite (u_n) est dite **croissante** si : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n}$
- Une suite (u_n) est dite **décroissante** si : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n}$
- Dans le cas où ces inégalités sont strictes, on parlera de **croissance stricte** et de **décroissance stricte**.
- Une suite (u_n) est dite (strictement) **monotone** si elle est :
  × soit (strictement) **croissante**,
  × soit (strictement) **décroissante**.
- Une suite (u_n) est dite constante s'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$.

$$\begin{array}{rcl} (u_n) \text{ constante} & \Leftrightarrow & \exists a \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \\ & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \\ & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \end{array}$$

- Une suite est dite **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang. $\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0})}$
- De manière générale, on dit qu'une propriété $\mathscr{P}(.)$ est vérifiée à partir d'un certain rang si : $\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow \mathscr{P}(n))}$

Exercice 6
Montrer que ces deux notions de croissance sont équivalentes.

Méthodologie
Pour montrer qu'une suite est croissante, il faut démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \ \geqslant\ u_n$$

Cherchons à simplifier cette inégalité. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) En déplaçant u_n de l'autre côté de l'inégalité :

$$u_{n+1} \ \geqslant\ u_n \ \Leftrightarrow\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

> **À retenir** : pour étudier la monotonie d'une suite (u_n), on peut étudier le signe de la quantité $u_{n+1} - u_n$.

2) En divisant par u_n :

a. Si $u_n > 0$: $\quad u_{n+1} \ \geqslant\ u_n \ \Leftrightarrow\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$

b. Si $u_n < 0$: $\quad u_{n+1} \ \geqslant\ u_n \ \Leftrightarrow\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$

Dans le cas des suites de signe constant, on peut donc étudier la monotonie de (u_n) en formant le quotient. Plus précisément :

> **À retenir** : pour étudier la monotonie d'une suite (u_n),
>
> - Si (u_n) est une suite strictement positive ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$)
>
> $$(u_n) \text{ croissante } \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$
>
> $$(u_n) \text{ décroissante } \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$$
>
> - Si (u_n) est une suite strictement négative ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 0$)
>
> $$(u_n) \text{ croissante } \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$$
>
> $$(u_n) \text{ décroissante } \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$

(pour monotonie stricte : remplacer inégalités larges par des strictes)

Remarque
Une suite réelle à la fois croissante et décroissante est constante.

Exercice 7
Soit (u_n) une suite telle qu'il n'existe aucun rang à partir duquel elle est de signe constant. Montrer que (u_n) n'est pas monotone.

Remarque
La forme de u_n nous permet de décider quelle quantité considérer :

- si u_n est définie « à l'aide de sommes », on forme la quantité $u_{n+1} - u_n$.
- si u_n est définie « à l'aide de quotients », on forme la quantité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exemple
Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) définies par :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} \geqslant 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

(elle est même strictement croissante puisque $\dfrac{1}{n+1} > 0$)

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $n! > 0$ et $\sqrt{n} > 0$, on a : $v_n > 0$.
La suite (v_n) est strictement positive. Or :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(n+1)!}{\sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n}}{n!} = \frac{(n+1) \times (\cancel{n!})}{\sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n}}{\cancel{n!}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} \times \cancel{\sqrt{n+1}}}{\cancel{\sqrt{n+1}}} \times \sqrt{n} \ = \ \sqrt{n+1} \times \sqrt{n} > 1 \end{aligned}$$

Ainsi la suite (v_n) est strictement croissante.

II.3.b) Bornes d'une suite numérique

Définition *(Notion de majorant, minorant)*

- Une suite (u_n) est dite **majorée** si elle admet un majorant.

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M}$$

- Une suite (u_n) est dite **minorée** si elle admet un minorant.

$$\boxed{\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m}$$

- Une suite à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

$$\boxed{(u_n) \text{ est bornée } \Leftrightarrow\ \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M}$$

Remarque

- Si une suite (u_n) admet un majorant M, tout réel $R \geqslant M$ est aussi majorant de la suite puisqu'on a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M \leqslant R$.
- Ainsi, si la suite (u_n) admet un majorant, elle en admet une infinité.
- Un majorant d'une suite (u_n) est un réel indépendant de la valeur de n.
  Par exemple, si on a (u_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n^2$, **on ne peut pas** en conclure que (u_n) est majorée.
  (par exemple, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant n^2$ mais la suite (n) n'est pas majorée)

Exemple

Considérons la suite $\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)$.

- Elle est majorée par 2 puisque : $2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$.
- Elle est donc majorée par : 2, 2.1, e, 3, $\dfrac{7}{2}$, $\sqrt{37}$ ...
- Parmi ces majorants, il convient de distinguer « le meilleur » *i.e.* celui qui apporte le plus d'information sur la suite.
  Il s'agit ici de 2, le plus petit des majorants de la suite.

Définition *(Notion de borne supérieure, inférieure)*

- Toute suite réelle (u_n) <u>majorée</u> admet une **borne supérieure** :
  par définition, c'est le plus petit des majorants de la suite.

  On notera $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ la borne supérieure de (u_n).
- Toute suite réelle (u_n) <u>minorée</u> admet une **borne inférieure** :
  par définition, c'est le plus grand des minorants de la suite.

  On notera $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ la borne inférieure de (u_n).

Remarque

- Par définition, la borne supérieure de (u_n) (si elle existe !) est un majorant de (u_n). On est donc dans l'un des deux cas suivants :
  - × soit (u_n) est majorée et, dans ce cas, elle admet une borne supérieure,
  - × soit (u_n) n'est pas majorée et, dans ce cas, elle n'admet pas de borne supérieure.
- Il est à noter que la borne supérieure de (u_n) (si elle existe !) n'est pas forcément un élément de la suite.
- Par exemple, la suite (u_n) de terme générale $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ admet pour borne supérieure $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = 2$. Et 2 n'est jamais atteint ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 2$).
- Si le « meilleur » des majorants est atteint, on parle de maximum.

Définition *(Notion de maximum, minimum)*

- On dira qu'une suite (u_n) admet un **maximum** atteint au rang n_0 si :

$$\boxed{\exists n_0, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n_0}}$$

  Un maximum atteint au rang n_0 sera noté : $u_{n_0} = \max\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
- On dira qu'une suite (u_n) admet un **minimum** atteint au rang n_0 si :

$$\boxed{\exists n_0, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n_0}}$$

  Un minimum atteint au rang n_0 sera noté : $u_{n_0} = \min\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Remarque
Les notions de maximum et de borne supérieure sont différentes.

1) Si une suite admet un maximum, alors elle admet aussi une borne supérieure qui est égale à ce maximum.

2) Ainsi, si une suite n'admet pas de borne supérieure, elle n'admet pas non plus de maximum. *(c'est la contraposée du point précédent)*

3) Une suite peut admettre une borne supérieure mais pas de maximum. Autrement dit, la borne supérieure d'une suite n'est pas forcément atteinte (*i.e.* n'est pas forcément un élément de la suite).
(considérer par exemple la suite $(2 - \frac{1}{n})$*)*

Exercice 8

a) La suite $\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$ est-elle majorée ? Minorée ?
Admet-elle une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

b) Répondre aux mêmes questions dans le cas de la suite $\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$.

Propriété (*Caractérisation des suites bornées)*

$$\boxed{(u_n) \text{ est bornée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists M \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M}$$

Autrement dit : (u_n) est bornée `ssi` la suite $(|u_n|)$ possède un majorant.

Remarque
Cette caractérisation permet de donner un sens à la notion de suite complexe bornée.

Définition
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
On dit que la suite (u_n) est bornée si son module est majoré.

$$(u_n) \text{ bornée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists M \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$$

II.3.c) Suites extraites

Définition
Soit (u_n) est une suite.
Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

- La suite $(u_{\varphi(n)})$ est une **sous-suite** (ou **suite extraite**) de (u_n).

Exemple
Considérons la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

- Si on note $v_n = u_{2n}$, alors (v_n) est une suite extraite de (u_n) définie par :
  $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{(-1)^{2n}}{(2n)+1} = \dfrac{1}{2n+1}$.
- Si on note $w_n = u_{2n+1}$, alors (v_n) est une suite extraite de (u_n) définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)+1} = \dfrac{-1}{2n+2}$.
- La suite $(u_{n-3})_{n \geqslant 3}$ est aussi une suite extraite de (u_n).
- La suite $(u_{\ln(n)})_{n \geqslant 1}$ n'est pas une suite extraite de (u_n).

Exercice 9
On considère la suite (S_n) de terme général : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont des suites extraites de la suite (S_n).
Il suffit de remarquer que $\varphi : n \mapsto 2n$ et $\psi : n \mapsto 2n+1$ sont des fonctions :
× de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,
× strictement croissantes.

b. Déterminer le sens de variation des suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).
Notons (v_n) la suite de terme général $v_n = S_{2n}$.
Alors : $v_{n+1} - v_n = S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = \ldots$
(on agit de même pour (S_{2n+1}) $\ldots$*)*

III. Suites usuelles

III.1. Suites arithmétiques

Définition

- Une suite (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r}$$

- Dans ce cas, le scalaire r est appelé **raison** de la suite.

Théorème 2. *(Caractérisation des suites arithmétiques)*

$$\boxed{(u_n) \text{ arithmétique} \quad \Leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + n \times r}$$

Exemple

La suite (u_n) suivante est arithmétique.

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$$

Elle a pour formule explicite : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5n + 3$.

Propriété *(D'autres caractérisations)*

1. $\boxed{(u_n) \text{ arithmétique} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}}$

2. $\boxed{(u_n) \text{ arithmétique} \quad \Leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ u_n = u_p + (n-p)r}$

Démonstration.
La caractérisation 2 est relativement immédiate.
La caractérisation 1 se démontre en formant la différence $u_n - u_{n-1}$. □

III.2. Suites géométriques

Définition

- Une suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n}$$

- Dans ce cas, le scalaire q est appelé **raison** de la suite.

Théorème 3. *(Caractérisation)*

$$\boxed{(u_n) \text{ géométrique} \quad \Leftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n}$$

Exemple

La suite (u_n) suivante est arithmétique.

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5i \times u_n \end{cases}$$

Elle a pour formule explicite : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times (5i)^n$.

Propriété *(D'autres caractérisations)*

1. $\boxed{(u_n) \text{ géométrique} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ {u_n}^2 = u_{n-1} \times u_{n+1}}$

2. $\boxed{(u_n) \text{ géométrique} \quad \Leftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ u_n = u_p \times q^{(n-p)}}$

Démonstration.
La caractérisation 2 est relativement immédiate.
La caractérisation 1 peut se faire par analogie avec la preuve dans le cas arithmétique : on forme $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ (pour $u_{n-1} \neq 0$!).
(que dire d'une suite géométrique (u_n) qui admet un rang n_0 tq $u_{n_0} = 0$?) □

Sommes des premiers termes d'une suite arithmétique/géométriqueExercice 11

1) Soit (u_n) suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} (u_0 + k \times r) = \sum_{k=0}^{n} u_0 + r \sum_{k=0}^{n} k \\ &= (n+1)\ u_0 + r\ \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\ \left(u_0 + \frac{n}{2}\ r\right)\end{aligned}$$

2) Soit (u_n) suite géométrique de raison $q \neq 1$.

- Si $q \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} q^k \times u_0 = u_0 \times \sum_{k=0}^{n} q^k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

On rappelle que si $m \in [\![0, n]\!]$*, on a :* $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}$
Ce qu'on peut montrer aussi en écrivant la somme en extension :

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} q^k &= q^m + q^{m+1} + \ldots + q^n = q^m(1 + q + \ldots + q^{n-m}) \\ &= q^m \left(\sum_{k=0}^{n-m} q^k\right) = q^m\ \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}\end{aligned}$$

3) Si $q = 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 1^k \times u_0 = \sum_{k=0}^{n} u_0 = (n+1) \times u_0$$

Exercice 10 *(somme d'une suite arithmétique)*
Soit (u_n) une suite arithmétique.

a. Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ u_k + u_{n-k} = u_0 + u_n$.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$.

c. Retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ à l'aide de cette formule.

a. Que peut-on dire du sens de variation d'une suite arithmétique réelle ?
Soit (u_n) suite arithmétique de raison r. Alors :

$$u_{n+1} - u_n = r$$

La suite (u_n) est croissante si $r \in \mathbb{R}_+$, décroissante sinon.

b. Que peut-on dire du sens de variation d'une suite géométrique réelle ?
Soit (u_n) suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.

- Si $u_0 = 0$ ou $q = 0$, la suite est constante nulle.
  Elle est donc à la fois croissante et décroissante.
- On suppose maintenant $u_0 \neq 0$ et $q \neq 0$.
  On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$ (récurrence immédiate).

  1) Traitons le cas $u_0 > 0$.

  × si $q > 0$, on a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

  $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

  La suite (u_n) est croissante si $q \geqslant 1$, décroissante sinon.

  × si $q < 0$, la suite change de signe d'un rang à l'autre.
  La suite (u_n) n'est donc ni croissante ni décroissante.

  2) Le cas $u_0 < 0$ est similaire.
  Il faut cependant faire attention.
  En effet, si la suite (u_n) est négative on a :

  $$u_{n+1} \geqslant u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$$

  × si $q > 0$, on a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 0$.
  La suite (u_n) est croissante si $q \leqslant 1$, décroissante sinon.

  × si $q < 0$, la suite change de signe d'un rang à l'autre.
  La suite (u_n) n'est donc ni croissante ni décroissante.

Et si on prenait un peu de recul ?

Les suites arithmétiques et géométriques ont des constructions similaires : partant d'un élément u_0 on itére n fois une opération scalaire pour obtenir la valeur de u_n. Cette opération est :

× l'ajout de la raison dans le cas d'une suite arithmétique,

× la multiplication par la raison dans le cas d'une suite géométrique.

On peut obtenir les caractérisations précédentes (et démonstrations) des suites géométriques par traduction des propriétés des suites arithmétiques suivant le dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} + & \longleftrightarrow & \times \\ - & \longleftrightarrow & / \\ n.r & \longleftrightarrow & q^n \\ 2u_n = u_{n+1} + u_{n-1} & \longleftrightarrow & u_n^2 = u_{n+1} \times u_{n-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{suites arithmétiques} \longleftrightarrow \text{suites géométriques}}$$

Exercice 12
Soient (u_n) une suite arithmétique réelle et (v_n) une suite géométrique réelle dont tous les termes sont strictement positifs.

a. Que peut-on dire de la suite (v_n) de terme général $v_n = e^{u_n}$?
Notons r la raison de (u_n).
On a alors : $v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n+r} = e^r \times e^{u_n} = e^r \times v_n$
La suite (v_n) est donc géométrique de raison e^r.

b. Que peut-on dire de la suite (u_n) de terme général $v_n = \ln(u_n)$?
Notons q la raison de (u_n). On traite le cas où $u_0 > 0$ et $q > 0$ (pour assurer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
On a alors : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(q \times u_n) = \ln(q) + \ln(u_n) = v_n + \ln(q)$
La suite (v_n) est donc arithmétique de raison $\ln(q)$.

III.3. Suites arithmético-géométriques

III.3.a) Définition

Définition

- Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** s'il existe $a \in \mathbb{K} \backslash \{0, 1\}$ et un réel $b \in \mathbb{K}^*$ tel que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a \times u_n + b}$
- On appelle **équation de point fixe** associée à la suite (u_n) l'équation (en la variable x) suivante : $\boxed{x = a \times x + b}$

  (si on note $f : x \mapsto a.x + b$, cette équation se réécrit : $f(x) = x$, faisant ainsi de l'élément $x \in \mathbb{K}$ un **point fixe** *de f)*

III.3.b) Méthode d'étude

Considérons une suite arithmético-géométrique (u_n).
On va ramener l'étude de ce type de suites à l'étude des suites géométriques.

1) *Résolution de l'équation de point fixe $x = a \times x + b$*

Cette équation admet pour unique solution $\lambda = \dfrac{b}{1-a}$.

2) *Utilisation d'une suite auxiliaire (v_n) (géométrique)*

$$\begin{array}{lrcccccl} \text{On écrit :} & u_{n+1} & = & a & \times & u_n & + \ b & (L_1) \\ & \lambda & = & a & \times & \lambda & + \ b & (L_2) \\ \text{et donc} & u_{n+1} - \lambda & = & a & \times & (u_n - \lambda) & & (L_1) - (L_2) \end{array}$$

Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.
De par l'égalité précédente, on a : $v_{n+1} = a \times v_n$.

3) *Obtention de la formule explicite pour (v_n)*

La suite (v_n) est géométrique de raison a. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = a^n \times v_0$.

4) <u>*Conclusion : obtention de la formule explicite pour* (u_n)</u>

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n - \lambda \;=\; a^n \times (u_0 - \lambda)$
On obtient donc une formule explicite pour (u_n).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \;=\; a^n \times (u_0 - \lambda) + \lambda}$$

Remarque

- Le principe de la démonstration est de faire apparaître u_n comme somme d'une partie géométrique (v_n) et d'un élément (λ) : $u_n = v_n + \lambda$.
- Les suites arithmético-géométriques apparaissent ainsi comme des suites géométriques translatées de λ.
- On note que la partie géométrique dans la définition de (u_n) $(u_{n+1} = {\color{red}a} \times u_n + \ldots)$ se retrouve dans la formule explicite $(u_n = {\color{red}a}^n \times (u_0 - \lambda) + \ldots)$.

Exercice 13

Notons (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3 \times u_n + 2$.
Donner une formule explicite de (u_n) puis calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

1) L'équation de point fixe associée à la suite (u_n) est : $x = 3 \times x + 2$.
Or : $x = 3 \times x + 2 \;\Leftrightarrow\; 2 \times x = -2$
Cette équation a donc pour unique solution : $\lambda = -1$.

2) On écrit :
$$\begin{array}{rcccccl} u_{n+1} & = & 3 & \times & u_n & + & 2 \qquad (L_1) \\ \lambda & = & 3 & \times & \lambda & + & 2 \qquad (L_2) \end{array}$$

et donc $\quad u_{n+1} - \lambda \;=\; 3 \;\times\; (u_n - \lambda) \qquad (L_1) - (L_2)$

Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.

3) La suite (v_n) est géométrique de raison 3.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 3^n \times v_0 = 3^n\ (u_0 - \lambda) = 3^n\ (0 - (-1)) = 3^n$.

4) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \;=\; v_n + \lambda \;=\; 3^n - 1$.

Enfin,
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} (3^k - 1) = \sum_{k=0}^{n} 3^k - \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} - (n+1) \\ &= 2\ (3^{n+1} - 1) - n - 1 \;=\; 2 \times 3^{n+1} - n - 3 \end{aligned}$$

III.4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

III.4.a) Définition

Définition

- Une suite (u_n) est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe un couple $(a, b) \in \left(\mathbb{K}^*\right)^2$ tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \;=\; a \times u_{n+1} + b \times u_n}$$

- On appelle **équation caractéristique** associée à la suite (u_n) l'équation (en la variable x) $x^2 = ax + b$. On peut la réécrire :

$$\boxed{x^2 - ax - b = 0}$$

III.4.b) Méthode d'étude

Cette méthode est basée sur le calcul des racines de l'équation caractéristique. On a ainsi trois cas différents, en fonction du discriminant Δ du polynôme caractéristique.

Théorème 4.
Soit (u_n) une suite récurrente linéaire réelle d'ordre 2.
Il existe donc $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

1) *Si $\Delta = a^2 + 4b > 0$*

Alors le polynôme admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.
La formule explicite de (u_n) est donnée par :

$$\boxed{u_n = \lambda \times r_1^n + \mu \times r_2^n}$$

où les réels λ et μ sont donnés par

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & u_0 \\ \lambda \times r_1 & + & \mu \times r_2 & = & u_1 \end{array}\right.$$

2) <u>*Si* $\Delta = a^2 + 4b = 0$</u>

Alors le polynôme admet une racine double r.
La formule explicite de (u_n) *est donnée par :*

$$\boxed{u_n = \lambda \times r^n + \mu \times n \times r^n}$$

où les réels λ *et* μ *sont donnés par*

$$\left\{\begin{array}{lclcl} \lambda & & & = & u_0 \\ \lambda r & + & \mu \times r & = & u_1 \end{array}\right.$$

3) <u>*Si* $\Delta = a^2 + 4b < 0$</u>

Alors le polynôme admet deux racines complexes conjuguées $r\, e^{i\omega}$ *et* $r\, e^{-i\omega}$.
La formule explicite de (u_n) *est donnée par :*

$$\boxed{u_n = \lambda \times r^n \cos(\omega\, n) + \mu \times r^n \sin(\omega\, n)}$$

où les réels λ *et* μ *sont donnés par*

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & & & = & u_0 \\ \lambda \times r \cos(\omega) & + & \mu \times r \sin(\omega) & = & u_1 \end{array}\right.$$

Démonstration.
Hors programme et donc non développée ici. □

Exercice 14 *(suite de Fibonacci)*
On considère la suite donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} & = & u_{n+1} + u_n \end{array}\right.$$

Donner une formule explicite de cette suite.

- L'équation caractéristique associée à la suite (u_n) est : $x^2 = x + 1$.
  Notons P le polynôme : $P(X) = X^2 - X - 1$.
  Son discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4\,(-1) = 1 + 4 = 5 > 0$.
  Ce polynôme admet donc deux racines disctinctes :

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- On en déduit la formule explicite de (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \times {r_1}^n + \mu \times {r_2}^n$
  où les valeurs λ et μ sont données par le système :

$$(S)\ \left\{\begin{array}{ccccll} 0 & = & \lambda & + & \mu & \textit{(valeur en } n = 0\textit{)} \\ 1 & = & \lambda \times r_1 & + & \mu \times r_2 & \textit{(valeur en } n = 1\textit{)} \end{array}\right.$$

Résolvons-le.

$$(S)\ \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccll} -1 & = & & (r_1 - r_2)\ \mu & {\scriptstyle r_1 \times (L_1) - (L_2)} \\ -1 & = & (r_2 - r_1)\ \lambda & & {\scriptstyle r_2 \times (L_1) - (L_2)} \end{array}\right.$$

Notons enfin que : $r_2 - r_1 \ = \ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \ = \ \sqrt{5}$.
On en déduit que : $\lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

- Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ & = & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \end{array}$$

Remarque

- Dans cette résolution, on a conservé r_1 et r_2 dans le système (S).
  Ce choix a été fait uniquement pour alléger les calculs qui suivent.
- Généralement, on utilise directement les valeurs de r_1 et r_2 pour écrire et résoudre le système (S).

Théorème 5.
Soit (u_n) une suite récurrente linéaire complexe d'ordre 2.
Il existe donc $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}^*$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

1) Si $\Delta = a^2 + 4b \neq 0$

Alors le polynôme admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.
La formule explicite de (u_n) est donnée par :

$$\boxed{u_n = \lambda \times r_1^n + \mu \times r_2^n}$$

où les réels λ et μ sont donnés par

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & u_0 \\ \lambda \times r_1 & + & \mu \times r_2 & = & u_1 \end{array}\right.$$

2) Si $\Delta = a^2 + 4b = 0$

Alors le polynôme admet une racine double r.
La formule explicite de (u_n) est donnée par :

$$\boxed{u_n = \lambda \times r^n + \mu \times n \times r^n}$$

où les réels λ et μ sont donnés par

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & & & = & u_0 \\ \lambda r & + & \mu \times r & = & u_1 \end{array}\right.$$

IV. Retour sur le principe de récurrence

IV.1. Récurrence double

IV.1.a) Pour quels types d'énoncés

Ce principe de récurrence est adapté lorsque, pour démontrer une propriété à un certain rang, il est nécessaire de savoir que cette propriété est vérifiée **aux deux rangs précédents**. Il est donc classique d'opérer par récurrence double pour prouver des propriétés sur des suites (u_n) qui sont définies sous la forme :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} u_0, u_1 \text{ donnés} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n) \end{array}\right.}$$

où f est une fonction à deux variables.

IV.1.b) Aspect théorique

Théorème 6.
Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ et telle que :

1. Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ *et* $\mathscr{P}(1)$ *sont vraies*

2. Hérédité : $\forall n \geqslant 0,\ (\mathscr{P}(n)\ \texttt{ET}\ \mathscr{P}(n+1) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2))$

Alors la propriété est vérifiée pour tout entier naturel.
Autrement dit : $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ \mathscr{P}(n)}$

Exercice 15
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1, \quad u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} \end{array}\right.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et tel que $u_n > 0$.

IV.1.c) Modèle de rédaction : illustration sur un exemple

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 8 \times 2^n - 7 \times 3^n$.
(ou par la méthode d'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

Démonstration.
Montrons par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$
où $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 8 \times 2^n - 7 \times 3^n$.

1. **Initialisation**

- D'une part, $8 \times 2^0 - 7 \times 3^0 = 8 - 7 = 1$ et d'autre part $u_0 = 1$.
  Donc $\mathscr{P}(0)$.
- D'une part, $8 \times 2^1 - 7 \times 3^1 = 8 \times 2 - 7 \times 3 = 16 - 21 = -5$ et d'autre part $u_1 = -5$.
  Donc $\mathscr{P}(1)$.

2. **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vérifiées.
Démontrons $\mathscr{P}(n+2)$. ($i.e.$ $u_{n+2} = 8 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+2}$)
Par définition de la suite (u_n), on a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\ &= 5(8 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^{n+1}) - 6(8 \times 2^n - 7 \times 3^n) && \textit{(par H.R.)} \\ &= 8 \times 2^n(5 \times 2 - 6) - 7 \times 3^n(5 \times 3 - 6) \\ &= 8 \times 2^n \times 4 - 7 \times 3^n \times 9 \ = \ 8 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+2} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vérifiée.

Par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$. □

IV.2. Récurrences fortes

IV.2.a) Pour quels types d'énoncé

Ce principe de récurrence est adapté lorsque, pour démontrer une propriété à un certain rang, il est nécessaire de savoir que cette propriété est vérifiée **à tous les rangs précédents**. Il est donc classique d'opérer par récurrence forte pour prouver des propriétés sur des suites (u_n) qui sont définies sous la forme :

$$\boxed{\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \end{cases}}$$

où f_n est une fonction à $n+1$ variables.

IV.2.b) Aspect théorique

Théorème 7.
Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ et telle que :

1. Initialisation *:* $\mathscr{P}(0)$ *est vraie*

2. Hérédité *:* $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathscr{P}(0)\ \texttt{ET}\ \mathscr{P}(1)\ \texttt{ET}\ \mathscr{P}(2)\ \texttt{ET} \dots \texttt{ET}\ \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1))$

Alors la propriété est vérifiée pour tout entier naturel $n \geqslant 0$.
Autrement dit : $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ \mathscr{P}(n)}$

Exemple

1) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{u_k}{k+1} \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall n \geqslant 2, u_n = n + 1$.

2) On considère la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)v_k \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall n \geqslant 2, v_n = (n+1)!$
On pourra se servir du fait que : $(k+1) = ((k+2)-1)$

3) On considère la suite (w_n) définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_0 + w_1 + \cdots + w_n \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \leqslant 2^n$.

Remarque
Ces exemples sont assez artificiels.
On peut en effet les traiter par récurrence simple en remarquant que :

1) $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) u_n$,

2) $v_{n+1} = (n+2)v_n$,

3) $w_{n+1} = 2w_n$.

IV.2.c) Modèle de rédaction : illustration sur un exemple

Exercice 16
Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ est multiple d'un nombre premier.

Démonstration.
Montrons par récurrence forte que : $\forall n \geqslant 2, \mathscr{P}(n)$
où $\mathscr{P}(n)$: n est multiple d'un nombre premier.

1. **Initialisation**
2 est multiple d'un nombre premier : lui-même.
Ainsi, $\mathscr{P}(2)$ est vérifiée.

2. **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$.
Supposons que la propriété est vérifiée jusqu'au rang n
(autrement dit, $\mathscr{P}(2)$ et $\mathscr{P}(3)$ et ... et $\mathscr{P}(n)$ sont vraies).
Démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $n+1$ est multiple d'un nombre premier)

Deux cas se présentent.

- Si $n+1$ est premier :
Alors $n+1$ est multiple de lui-même.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée dans ce cas.
- Si $n+1$ n'est pas premier :
Alors, par définition, $n+1$ admet un diviseur d autre que 1 et lui-même.
Ce diviseur est dans l'ensemble $[\![2, n]\!]$.
Or, par hypothèse**S** de récurrence (c'est $\mathscr{P}(d)$ qui nous sert ici), on sait que : d est multiple d'un nombre premier p.
Par suite, $n+1$ est multiple de p.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vérifiée dans ce cas.

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

Par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$. □

V. Suites numériques convergentes

V.1. Définitions

Définition *Suites numériques convergentes*

Soit $\ell \in \mathbb{K}$.

- La suite (u_n) **converge vers** ℓ (ou admet la limite ℓ / ou tend vers ℓ) quand n tend vers $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)}$$

- Par abus de langage, on omettra de préciser « quand n tend vers $+\infty$ ».
- Lorsque (u_n) converge vers ℓ, on note :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

- Énonçons cette propriété sous forme de phrase mathématique :
  « quelque soit la précision ε (> 0) choisie, on peut trouver un rang à partir duquel les éléments de la suite ne s'écartent pas de ℓ de plus de ε »

Note
La notation « $\varepsilon > 0$ » est une abréviation de « $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ ».

Proposition 16.

Soit (u_n) une suite complexe.

Soit $\ell \in \mathbb{C}$.

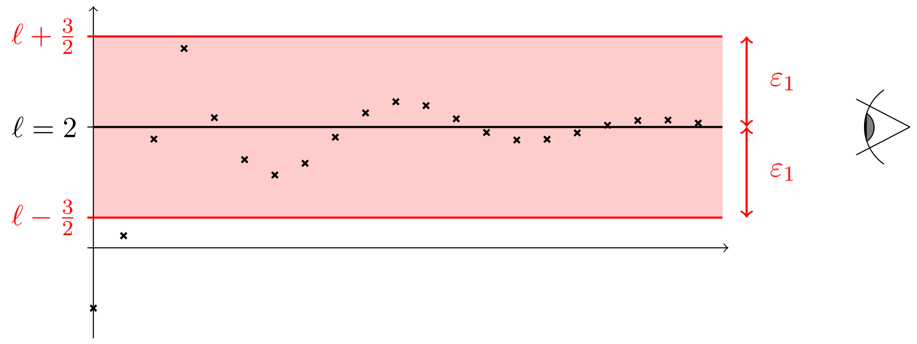
$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Re}\,(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}\,(\ell) \\ \mathrm{Im}\,(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}\,(\ell) \end{array} \right.}$$

V.2. Représentation graphique

On considère (u_n) une suite convergeant vers le réel $\ell = 2$.
On dispose de la représentation graphique des premiers termes de la suite et on cherche à représenter la notion de convergence sur ce graphique.

1) Si on choisit une précision $\varepsilon_1 = \frac{3}{2}$

a) En considérant (u_n) comme une fonction :

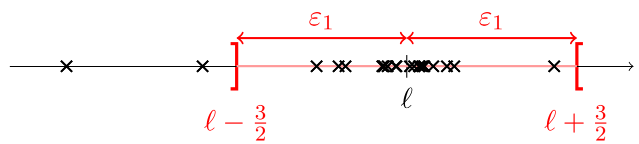


- La propriété de convergence énonce que pour cette précision $\varepsilon_1 = \frac{3}{2}$ donnée, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ (ici $n_1 = 2$) tel que :

$$\forall n \geqslant n_1,\ |u_n - \ell| < \varepsilon_1$$

- Graphiquement, cela signifie qu'à partir du rang $n_1 = 2$, tous les éléments de la suite (u_n) sont situés dans la bande rouge.

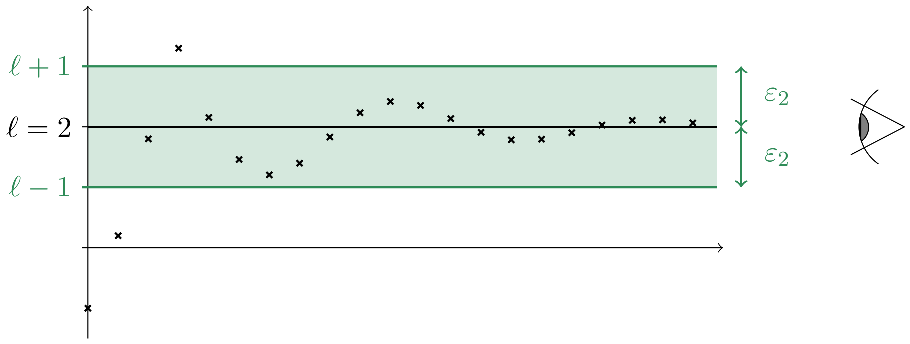
b) En considérant la position des éléments (u_n) sur la droite réelle :



- À partir du rang $n_1 = 2$, tous les éléments de la suite (u_n) sont situés dans l'intervalle $]\ell - \frac{3}{2}, \ell + \frac{3}{2}[$. Autrement dit, l'intervalle $]\ell - \frac{3}{2}, \ell + \frac{3}{2}[$ contient tous les termes de (u_n) sauf les deux premiers (u_0 et u_1).

2) Si on choisit une précision $\varepsilon_2 = 1$

a) En considérant (u_n) comme une fonction :

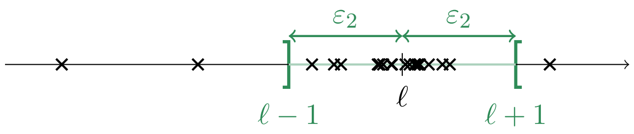


- La propriété de convergence énonce que pour cette précision $\varepsilon_2 = 1$ donnée, il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ (ici $n_2 = 4$) tel que :

$$\forall n \geqslant n_2, \ |u_n - \ell| < \varepsilon_2$$

- Graphiquement, cela signifie qu'à partir du rang $n_2 = 4$, tous les éléments de la suite (u_n) sont situés dans la bande verte.

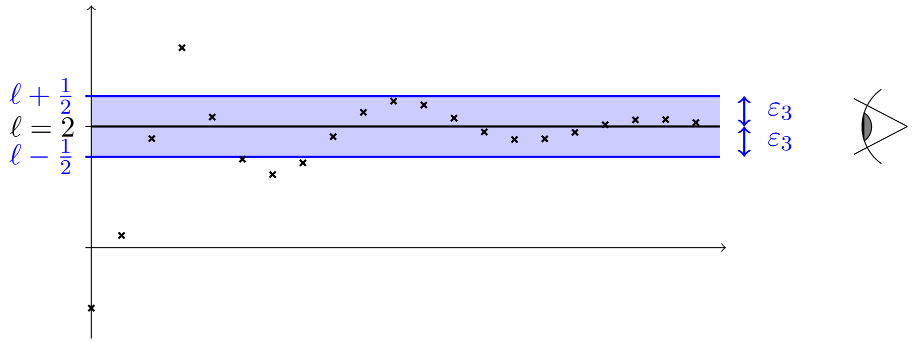
b) En considérant la position des éléments (u_n) sur la droite réelle :



- À partir du rang $n_2 = 4$, tous les éléments de la suite (u_n) sont situés dans l'intervalle $]\ell - 1, \ell + 1[$. Autrement dit, l'intervalle $]\ell - 1, \ell + 1[$ contient tous les termes de (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux (u_0, u_1, et u_3 en l'occurrence).

3) Si on choisit une précision $\varepsilon_3 = \frac{1}{2}$

a) En considérant (u_n) comme une fonction :

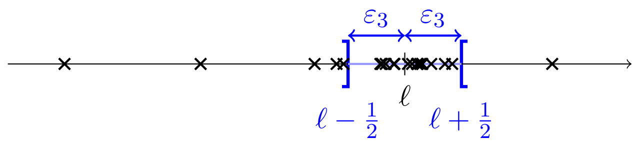


- La propriété de convergence énonce que pour cette précision $\varepsilon_3 = \frac{1}{2}$ donnée, il existe un rang $n_3 \in \mathbb{N}$ (ici $n_3 = 7$) tel que :

$$\forall n \geqslant n_3, \ |u_n - \ell| < \varepsilon_3$$

- Graphiquement, cela signifie qu'à partir du rang $n_3 = 7$, tous les éléments de la suite (u_n) sont situés dans la bande bleue.

b) En considérant la position des éléments (u_n) sur la droite réelle :



- À partir du rang $n_3 = 7$, tous les éléments de la suite (u_n) sont situés dans l'intervalle $]\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}[$. Autrement dit, l'intervalle $]\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}[$ contient tous les termes de (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux (u_0, u_1, u_3, u_5 et u_6 en l'occurrence).

Exemple

- Une suite constante est convergente.
- Une suite stationnaire est convergente.
- La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

  (à partir de quel rang peut-on assurer une précision de 10^{-8} ?)
- La suite $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 1.

Définition *Des définitions équivalentes*

1) (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux.
(c'est la définition donnée par le programme officiel)

2) (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon}$$

(avec l'abus de notation « $\forall n \geqslant n_0$ »)

Proposition 17.

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{K}$.

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers la limite } \ell \quad \Leftrightarrow \quad (u_n - \ell) \text{ converge vers } 0}$$

Démonstration.

$$\begin{array}{ll} & (u_n - \ell) \text{ converge vers } 0 \\ \Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |(u_n - \ell) - \cancel{0}| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & (u_n) \text{ converge vers } \ell \end{array}$$

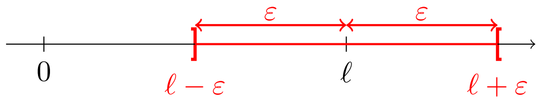
□

⚠ On ne parlera pas de la limite d'une suite (u_n) si on n'a pas prouvé au préalable que (u_n) était convergente.

Exercice 17

Soit (u_n) une suite tendant vers une limite $\ell > 0$.
Démontrer que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n > 0$.

La démonstration tient dans le dessin suivant.



On choisit ε de sorte que : $\ell - \varepsilon \in \,]0, \ell[$. Par exemple : $\varepsilon = \frac{\ell - 0}{2} = \frac{\ell}{2}$.

V.3. Suites numériques divergentes

Définition *Suites numériqes divergentes*

- Une suite (u_n) sera dite **divergente** si elle n'est pas convergente.
- Autrement dit, (u_n) est divergente s'il n'existe pas d'élément $\ell \in \mathbb{K}$ tel que (u_n) converge vers ℓ.

⚠ Les « suites réelles convergeant vers $+\infty$ (ou $-\infty$) » (dont on verra la définition plus loin) sont des suites divergentes.

Exemple

- La suite $((-1)^n)$ est divergente. Notons (u_n) cette suite. Alors :
  - × tous les termes u_m dont l'indice m est pair sont tels que : $u_m = 1$. Ces termes sont situés dans toute bande centrée en 1.
  - × tous les termes u_p dont l'indice p est pair sont tels que : $u_p = -1$. Ces termes sont situés dans toute bande centrée en -1.

Il n'y a pas de $\ell \in \mathbb{R}$ tel que toute bande centrée en ℓ contienne (à partir d'un certain rang) à la fois les termes d'indice pair et d'indice impair.

V.4. Propriétés des suites convergentes

Théorème 8. *(Unicité de la limite)*

Soit (u_n) une suite numérique.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell_1 \in \mathbb{K} \\ u_n \to \ell_2 \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \ell_1 = \ell_2}$$

Autrement dit, si une suite (u_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$, celle-ci est unique.

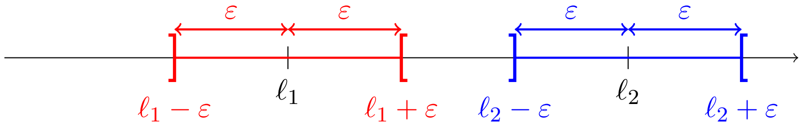
Démonstration.
Par l'absurde, supposons $u_n \to \ell_1 \in \mathbb{R}$, $u_n \to \ell_2 \in \mathbb{R}$ et $\texttt{NON}(\ell_1 = \ell_2)$.
Comme $\ell_1 \neq \ell_2$, on peut supposer (quitte à renommer ces limites) $\ell_2 > \ell_1$.

Soit $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{3}$.
(ce choix est guidé par le dessin ci-après : il faut faire en sorte que les intervalles bleus et rouges ne s'intersectent pas)

1) Comme $u_n \to \ell_1$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel : $|u_n - \ell_1| < \varepsilon$.

2) Comme $u_n \to \ell_2$, il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel : $|u_n - \ell_2| < \varepsilon$.

Cette situation est résumée par la représentation graphique ci-après.



Notons $N = \max(n_1, n_2)$.

- À partir du rang N, tous les termes de (u_n) sont dans l'intervalle rouge.
- À partir du rang N, tous les termes de (u_n) sont dans l'intervalle bleu.

Impossible ! □

Remarque

- Ce théorème permet de justifier (après coup !) la notation $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, qui n'a de sens que par unicité de la limite.

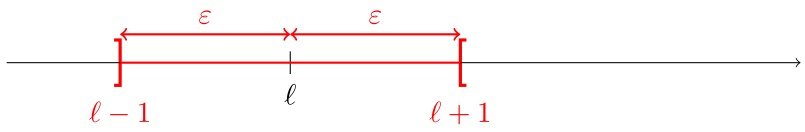
Théorème 9.

Soit (u_n) une suite numérique.

$$\boxed{(u_n) \text{ convergente } \Rightarrow \ (u_n) \text{ bornée}}$$

Autrement dit, toute suite convergente est bornée.

Démonstration.
Notons ℓ la limite de la suite (u_n). Choisissons une précision $\varepsilon = 1$.
Alors, à partir d'un certain rang n_0, on sait que $|u_n - \ell| < 1$.



Par inégalité triangulaire :

$$\big||u_n| - |\ell|\big| \ \leqslant \ |u_n - \ell| \ \leqslant \ 1$$

Ainsi : $-1 \ \leqslant \ |u_n| - |\ell| \ \leqslant \ 1$. En particulier :

$$|u_n| \ \leqslant \ |\ell| + 1$$

La suite (u_n) est donc bornée à partir d'un certain rang (n_0 en l'occurrence).
Il reste à montrer qu'elle est bornée tout court. Pour ce faire, on doit considérer les éléments de la suite précédant le rang n_0 : u_0, u_1, ..., u_{n_0-1}.
Ces éléments sont en nombre fini et leurs modules possèdent donc un maximum $A = \max\{\, |u_n| \mid n \in [\![0, n_0 - 1]\!]\}$.

Si on note $M = \max(A, |\ell| + 1)$, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \ \leqslant \ M$$

□

Remarque

- Par contraposée, on en déduit qu'une suite non bornée ne peut converger.
- Cet énoncé n'est pas une équivalence.
  En effet, une suite bornée n'est pas forcément convergente.
  Considérer par exemple la suite $((-1)^n)$

Proposition 18.

Soit (u_n) *est une suite numérique.*
Soit $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$ *une suite extraite de* (u_n).

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \ \Rightarrow\ u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

Autrement dit, si (u_n) *admet la limite* ℓ*, alors il en est de même de toutes ses suites extraites.*

Démonstration.
On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et on montre $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Soit $\varepsilon > 0$.

1) Comme (u_n) converge vers ℓ, il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

2) Or, comme φ est strictement croissante, il existe un rang n_1 tel que :

$$\forall n \geqslant n_1,\ \varphi(n) \geqslant n_0$$

3) On en conclut, d'après le point ***1)*** que : $\forall n \geqslant n_1,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$. □

Remarque

Cette proposition permet de démontrer de la divergence de suites.
Considérons une suite (u_n).

1) Si (u_n) admet une sous-suite divergente, alors (u_n) diverge.

2) Si (u_n) admet deux sous-suites tendant vers deux limites distinctes, alors (u_n) diverge.

Exemple

Montrer que la suite $((-1)^n)$ est divergente.

Proposition 19. *(Propriété de recouvrement)*

Soit (u_n) *une suite numérique.*
Soit $\ell \in \mathbb{K}$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

Démonstration.
Supposons :

× d'une part : $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_1$, $|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$.

× d'autre part : $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_2$, $|u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On pose alors : $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$. Alors, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$|u_n - \ell| \ \leqslant\ \varepsilon$$

Ainsi : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. □

V.5. Opérations sur les suites convergentes

V.5.a) Somme de deux suites convergentes

Théorème 10.

Soit (u_n) une suite numérique convergeant vers ℓ_1.

Soit (v_n) une suite numérique convergeant vers ℓ_2.

Alors la suite $(u_n + v_n)$ est convergente, de limite $\ell_1 + \ell_2$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \end{array}\right\} \Rightarrow u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 + \ell_2}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell_1$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_1,\ |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$.
- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_2,\ |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$.
- Or, par l'inégalité triangulaire, on a :

$$|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| = |(u_n - \ell_1) + (v_n - \ell_2)| \leqslant |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2|$$

On pose $n_0 = \max(n_1, n_2)$. On obtient, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| \ \leqslant\ |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \ \leqslant\ \varepsilon$$

□

Remarque

- Ce résultat n'est évidemment pas une équivalence. On peut en effet trouver deux suites (u_n), (v_n) telles que $(u_n + v_n)$ est convergente et (u_n) et (v_n) divergentes. Par exemple :
  - × $u_n = (-1)^n$ et $v_n = -(-1)^n$.
    La suite $(u_n + v_n)$ est alors constante ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n = 0$). Elle converge donc vers 0 alors que (u_n) et (v_n) ne possèdent pas de limite.
  - × $u_n = n$ et $v_n = -n + \dfrac{1}{n}$.
    On a : $u_n + v_n = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
    (définition à venir)

V.5.b) Produit d'une suite convergente par un réel λ

Théorème 11.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Soit (u_n) une suite numérique convergeant vers ℓ.

Alors la suite (λu_n) est convergente, de limite $\lambda\ell$.

$$\boxed{u_n \to \ell \ \Rightarrow\ \lambda u_n \to \lambda\ell}$$

Démonstration.
Il suffit de remarquer que $|\lambda u_n - \lambda\ell| = |\lambda||u_n - \ell|$. Soit $\varepsilon > 0$.

1) Comme (u_n) converge vers ℓ, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

2) On en déduit que : $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| = |\lambda||\lambda u_n - \lambda\ell| < |\lambda|\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$.

□

V.5.c) Produit d'une suite de limite nulle par une suite bornée

Théorème 12.

Soit (u_n) une suite numérique de limite 0.

Soit (v_n) une suite bornée.

Alors la suite $(u_n \times v_n)$ est convergente, de limite 0.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to 0 \\ (v_n) \textit{ bornée} \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \times v_n \to 0}$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.
1) Soit $M \in \mathbb{R}$ une borne de (v_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n\ v_n| = |u_n|\ |v_n| \leqslant |u_n|\ M$.
2) Comme (u_n) tend vers 0, il existe un rang n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$.
On en déduit : $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n\ v_n| = |u_n|\ |v_n| \leqslant |u_n|\ M \leqslant \frac{\varepsilon}{M}\ M = \varepsilon$. □

Exemple

Quelle est la limite de la suite $\left(\dfrac{1-n}{n+n^2}\right)$?

Il suffit de remarquer que : $\dfrac{1-n}{n+n^2} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1-n}{1+n}$.

Or : $\dfrac{1}{n} \to 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leqslant \dfrac{1-n}{1+n} \leqslant 0$.

On en déduit que $\dfrac{1}{n} \times \dfrac{1-n}{1+n} \to 0$.

V.5.d) Produit de deux suites convergentes

Théorème 13.

Soit (u_n) une suite numérique de limite ℓ_1.
Soit (v_n) une suite numérique de limite ℓ_2.
Alors la suite produit $(u_n \times v_n)$ converge vers $\ell_1 \times \ell_2$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell_1 \\ u_n \to \ell_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n \times v_n \to \ell_1 \times \ell_2}$$

Démonstration.
On remarque d'abord que : $u_n\ v_n - \ell_1\ \ell_2 = (u_n - \ell_1)v_n + \ell_1(v_n - \ell_2)$.

- $(u_n - \ell_1)$ converge vers 0 et (v_n) est convergente donc bornée.
  Ainsi, $(u_n - \ell_1)v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- $(v_n - \ell_2)$ converge vers 0 donc $\ell_1(v_n - \ell_2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en conclut : $u_n\ v_n - \ell_1\ \ell_2 \to 0$ ce qui équivaut à : $u_n\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1\ \ell_2$. □

V.5.e) Quotient de deux suites convergentes

Théorème 14.

Soit (u_n) une suite numérique de limite $\ell \neq 0$.

Alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$
- × *est définie à partir d'un certain rang,*
- × *converge vers la limite $\frac{1}{\ell}$.*

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}}$$

Démonstration.

- La suite (u_n) tend vers ℓ. Ainsi : $|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- De plus : $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| \leqslant \dfrac{|u_n - \ell|}{|\ell|\,|u_n|}$.

  Or, comme (u_n) converge, alors cette suite est bornée. La suite $\left(\dfrac{1}{|u_n|}\right)$ l'est aussi. On en déduit que $\left(\dfrac{1}{|\ell|\,|u_n|}\right)$ est bornée.

  Par ailleurs : $|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit : $\dfrac{|u_n - \ell|}{|\ell|\,|u_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  D'où : $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Théorème 15.

Soit (u_n) une suite numérique de limite ℓ_1.
Soit (v_n) une suite numérique de limite $\ell_2 \neq 0$.

Alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$
- × *est définie à partir d'un certain rang,*
- × *converge vers la limite $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell_1}{\ell_2}}$$

Démonstration.

- D'après le théorème précédent, la suite $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ est définie (au moins à partir d'un certain rang) et converge vers $\dfrac{1}{\ell_2}$. On en déduit que $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est définie.
- De plus, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$.

Ainsi, par produit de suites convergentes, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente de limite $\ell_1 \times \dfrac{1}{\ell_2} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$. □

Exercice 18
Déterminer la limite de la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{2n^2+n+1}{n^2+3}$.

$$u_n = \frac{2n^2+n+1}{n^2+3} = \frac{2n^2}{n^2} \times \frac{1+\frac{n}{2n^2}+\frac{1}{2n^2}}{1+\frac{3}{2n^2}} = 2 \times \frac{1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}}{1+\frac{3}{2n^2}}$$

Or on a $1+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2n^2} \to 1$, et $1+\dfrac{3}{2n^2} \to 1$.
On en déduit que (u_n) est convergente, de limite 2.

V.5.f) Compatibilité avec la valeur absolue

Théorème 16.
Soit (u_n) une suite numérique de limite ℓ.
Alors la suite $(|u_n|)$ est convergente de limite $|\ell|$.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Rightarrow \quad |u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell|}$$

Démonstration.
Par inégalité triangulaire, on a : $||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell|$.
On peut contrôler la distance $|u_n - \ell|$, il en est donc de même de $||u_n| - |\ell||$. □

Remarque

- En général, il n'y a pas équivalence : une suite convergeant en valeur absolue n'est pas nécessairement convergente.
- Par exemple, la suite $(|(-1)^n|)$ est convergente ($\forall n \in \mathbb{N},\ |(-1)^n| = 1$) mais la suite $((-1)^n)$ est divergente.
- Par contre, l'équivalence est réalisée lorsque $\ell = 0$.
En effet, on a :

$$\begin{aligned} & (|u_n|) \text{ converge vers } 0 \\ \Leftrightarrow\ & \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ ||u_n| - 0| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow\ & \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ ||u_n|| = |u_n| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow\ & (u_n) \text{ converge vers } 0 \end{aligned}$$

Exemple
La suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ converge vers 0 car : $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n} \to 0$.

Le théorème ci-dessous généralise le résultat précédent.

Théorème 17. *(Théorème de composition des limites)*
Soit (u_n) une suite réelle de limite $a \in \mathbb{R}$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet en a une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$.
Alors la suite $(f(u_n))$ est convergente de limite ℓ.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \\ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{x\to a} f(x) = \ell}$$

Démonstration.
Hum, on s'emballe un peu : la démo nécessite la notion de limite d'une fonction en un point (*cf* chapitre limites / continuité d'une fonction). □

V.6. Compatibilité avec la relation d'ordre

V.6.a) Démontrer des inégalités pour les suites convergentes

Proposition 20. *(« Passage à la limite » dans les inégalités)*

Soit (u_n) une suite réelle convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

a) *S'il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \geqslant a$ alors on a : $\ell \geqslant a$.*

On peut résumer cette proposition comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ u_n \geqslant a \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \ell \geqslant a}$$

b) *S'il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \leqslant b$ alors on a : $\ell \leqslant b$.*

On peut résumer cette proposition comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ u_n \leqslant b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \ell \leqslant b}$$

c) *S'il existe un rang n_0 à partir duquel $a \leqslant u_n \leqslant b$ alors on a : $a \leqslant \ell \leqslant b$.*

On peut résumer cette proposition comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ a \leqslant u_n \leqslant b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a \leqslant \ell \leqslant b}$$

Démonstration.
Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Démontrons par l'absurde que : $(\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant a) \ \Rightarrow\ \ell \geqslant a$.

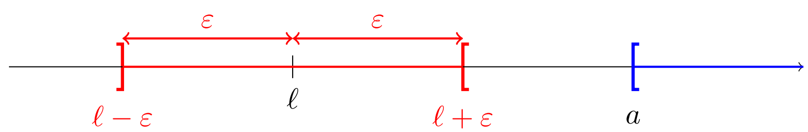
On suppose donc l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant a$ ainsi que la propriété $\texttt{NON}(\ell \geqslant a)$ (*i.e.* $\ell < a$).

On choisit alors $\varepsilon = \dfrac{a-\ell}{2}$.

1) Comme $u_n \to \ell$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel : $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

2) Or on sait que : $u_n \geqslant a$ à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Cette situation est résumée par la représentation graphique ci-dessous.



- Ainsi, à partir du rang $N = \max(n_0, n_1)$, les termes de la suite (u_n) se trouvent toutes dans l'intervalle rouge (d'après le point ***1)***).
- Or, à partir du rang $N = \max(n_0, n_1)$, les termes de la suite (u_n) se trouvent toutes dans l'intervalle bleu (d'après le point ***2)***).
- Le choix de ε assure que l'intervalle rouge et l'intervalle bleu ne se rencontrent pas. Les deux points précédents se contredisent donc. □

Remarque

- On parle parfois de « passage à la limite » dans les inégalités. Il faut faire attention avec ce terme. En effet, ce passage n'est possible que si on a prouvé au préalable que la suite (u_n) est convergente.
- En particulier, il ne faut pas confondre ce résultat avec le théorème d'encadrement présenté plus loin.

- Il est facile d'écrire un énoncé similaire avec des inégalités strictes.
  En effet, comme : $u_n > a \;\Rightarrow\; u_n \geqslant a$ (inégalité stricte implique large) :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ u_n > a \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \ell \geqslant a} \qquad \boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ u_n < b \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \ell \leqslant b}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ a < u_n < b \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; a \leqslant \ell \leqslant b}$$

Exemple

- Considérons une suite (u_n) tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
  Si (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, on obtient, par passage à la limite dans l'inégalité que : $\ell \geqslant 0$ et non pas $\ell > 0$.
- C'est par exemple le cas de la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Théorème 18. *(Théorème de comparaison des limites)*

Soit (u_n) une suite réelle convergente, de limite $\ell_1 \in \mathbb{R}$.

Soit (v_n) une suite réelle convergente, de limite $\ell_2 \in \mathbb{R}$.

Supposons de plus que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$.

On a alors : $\ell_1 \ \leqslant\ \ell_2$.

On peut résumer cette proposition comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \\ u_n \leqslant v_n \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \ell_1 \leqslant \ell_2}$$

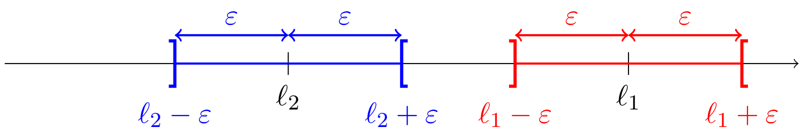
Démonstration.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant réciproquement vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$. Comme précédemment, on raisonne par l'absurde pour montrer que : $(\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n) \;\Rightarrow\; \ell_1 \leqslant \ell_2$.
On suppose donc l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$ ainsi que la propriété NON$(\ell_1 \leqslant \ell_2)$ (*i.e.* $\ell_1 > \ell_2$).

On choisit alors $\varepsilon = \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{3}$.

1) Comme $u_n \to \ell_1$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel : $|u_n - \ell_1| < \varepsilon$.

2) Comme $v_n \to \ell_2$, il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel : $|v_n - \ell_2| < \varepsilon$.

Cette situation est résumée par la représentation graphique ci-après.



Notons $N = \max(n_0, n_1, n_2)$.

× À partir du rang N, les termes de (u_n) se trouvent dans l'intervalle rouge.

× À partir du rang N, les termes de (v_n) se trouvent dans l'intervalle bleu.

× Ainsi, à partir du rang N, $u_n > v_n$, ce qui contredit la définition de n_0. □

Remarque

- Les suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, on peut encore parler de « passage à la limite » dans les inégalités.
- On peut écrire un énoncé similaire avec des inégalités strictes. En effet, comme : $u_n > v_n \;\Rightarrow\; u_n \geqslant v_n$ (inégalité stricte implique large), on a :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \\ u_n > v_n \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \ell_1 \geqslant \ell_2}$$

V.6.b) Démontrer de la convergence

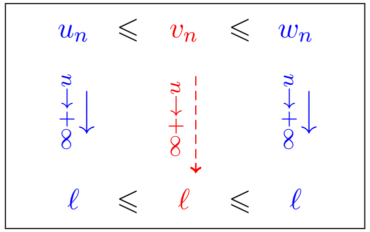
Théorème 19. *(Théorème d'encadrement)*

Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites réelles telles que :

- *(u_n) est convergente, de limite ℓ.*
- *(w_n) est convergente, de même limite ℓ.*
- *Il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.*

Alors la suite (v_n) est convergente de limite ℓ.

On peut résumer ce théorème comme suit.

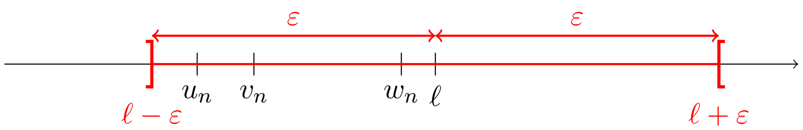


Démonstration.
Considérons un intervalle ouvert contenant ℓ.

- Tous les termes de (u_n) (sauf un nombre fini) sont dans cet intervalle.
- Tous les termes de (w_n) (sauf un nombre fini) sont dans cet intervalle.
- Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

On en conclut que tous les termes de (v_n) sont dans cet intervalle.

On peut rédiger cette démonstration « avec les ε » en s'appuyant sur la représentation graphique ci-dessous :



Il s'agit de démontrer que $v_n \to \ell$: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N,\ |v_n - \ell| < \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$.

1) Comme $u_n \to \ell$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_1,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$.
Autrement dit : $\forall n \geqslant n_1,\ -\varepsilon < u_n - \ell < \varepsilon$.

2) Comme $w_n \to \ell$, il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_2,\ |w_n - \ell| < \varepsilon$.
Autrement dit : $\forall n \geqslant n_2,\ -\varepsilon < w_n - \ell < \varepsilon$.

3) Par hypothèse, on a : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. On en déduit que :
$\forall n \geqslant n_0,\ u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell$

Combinons ces informations. Notons $N = \max(n_0, n_1, n_2)$.
Pour tout $n \geqslant N$, on a : $-\varepsilon < u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell < \varepsilon$.
Autrement dit : $\forall n \geqslant N,\ |v_n - \ell| < \varepsilon$. □

Remarque

- Dans cet énoncé, on ne suppose pas (v_n) convergente mais on le **démontre**.
- Ainsi, rédiger en argumentant par « un passage à la limite » serait une erreur logique (et donc sanctionnée comme telle). On ne peut « passer à la limite » que si l'on sait que la suite est convergente.
- Ce théorème est aussi appelé « théorème des gendarmes ».
L'idée est la suivante : deux gendarmes viennent d'attraper un voleur et l'encadrent en lui saisissant chacun un bras. Les gendarmes convergent (*i.e.* se dirigent) vers le poste de police. Ainsi encadré, le voleur n'a d'autre choix que se diriger lui aussi vers le poste de police.

Exercice 19 *(appliquer le théorème d'encadrement)*

a) Quelle est la limite de la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

On remarque que : $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{1}{n}}$. Or, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n^2} \leqslant \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2n}$.

Pour $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, on a : $a \leqslant b \ \Leftrightarrow\ a^2 \leqslant b^2$.

- Tout d'abord, remarquons que :

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} \leqslant 1+\frac{1}{2n} \quad \Leftrightarrow \quad 1+\frac{1}{n} \quad \leqslant \quad 1+\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}n}+\frac{1}{4n^2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \quad \leqslant \quad \frac{1}{4n^2}$$

  Ainsi, l'inégalité de droite est vérifiée.

- De même, on a : $\qquad 1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^2} \quad \leqslant \quad \sqrt{1+\frac{1}{n}}$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{2n}\right)^2 - \frac{2}{n^2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{n^4} \quad \leqslant \quad 1+\frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1+\frac{1}{n}-\frac{7}{4n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4} \quad \leqslant \quad 1+\frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^4} \quad \leqslant \quad \frac{7}{4n^2}+\frac{1}{n^3}$$

  Enfin, on a : $\frac{1}{n^4} \leqslant \frac{7}{4n^2}+\frac{1}{n^3} \ \Leftrightarrow\ 1 \leqslant \frac{7}{4}n^2+n$.

  Cette dernière égalité est vérifiée car $n \geqslant 1$.
  Ainsi, l'inégalité initiale est aussi vérifiée.

c) En déduire la limite de la suite $\left(\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\right)$.

En multipliant l'inégalité précédente par n (>0), on obtient :

$$n+\frac{1}{2}-\frac{1}{n} \leqslant \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leqslant n+\frac{1}{2}$$

D'où, en retirant n de chaque côté :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n} \leqslant \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n \leqslant \frac{1}{2}$$

On remarque alors que : $\frac{1}{2}-\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

On en conclut que la suite $\left(\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\right)$ est convergente,

et que sa limite vaut $\frac{1}{2}$.

VI. Généralisation au cas des limites infinies

VI.1. Définition

Définition *Suite divergeant vers l'infini*

Soit (u_n) une suite de réels.

- On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall A>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant n_0 \Rightarrow u_n>A)}$$

  Ce que l'on peut écrire, avec l'abus de notation habituel :

$$\boxed{\forall A>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant n_0,\ u_n>A}$$

- Ceci signifie que les termes de la suite deviennent, à partir d'un certain rang, aussi grands que souhaités.
- On dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$ si :

$$\boxed{\forall A>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant n_0 \Rightarrow u_n<-A)}$$

  Ce que l'on peut écrire, avec l'abus de notation habituel :

$$\boxed{\forall A>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant n_0,\ u_n<-A}$$

Remarque

- Une suite (u_n) qui tend vers $+\infty$ est une suite **divergente**. La notion de convergence est réservée aux suites admettant une limite **finie**. Cependant, par abus, on parlera de suite « tendant vers l'infini » et on utilisera quand même la notation :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \;=\; +\infty \qquad \text{ou} \qquad u_n \to +\infty$$

- Il est à noter que l'unicité de la limite s'étend au cas des limites infinies. Ainsi, une suite ne peut à la fois diverger vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

- Il n'est pas nécessaire, dans la définition de suite divergente, de supposer $A > 0$. Plus précisément, on a :

$$\boxed{u_n \to +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\; u_n > A}$$

$$\boxed{u_n \to -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\; u_n < A}$$

Propriété *immédiates*

Soit (u_n) une suite réelle.

1) Si (u_n) diverge vers $+\infty$ (réciproquement $-\infty$) alors elle est positive (réciproquement négative) à partir d'un certain rang.

$$\boxed{u_n \to +\infty \;\Rightarrow\; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\; u_n \geqslant 0}$$

$$\boxed{u_n \to -\infty \;\Rightarrow\; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\; u_n \leqslant 0}$$

2) Si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.
(réciproque fausse ! Considérer $((-1)^n n)$)

3) $\boxed{(u_n \to -\infty) \Leftrightarrow (-u_n \to +\infty)}$

Démonstration.

1) Notons $A = 0$. Comme $u_n \to +\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n \geqslant n_0,\; u_n > A = 0$.

2) Supposons par l'absurde que $u_n \to +\infty$ et (u_n) majorée.
- Notons M l'un de ses majorants.
- On note $A = M$. Comme $u_n \to +\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel : $u_n > A = M$.

Impossible !

3) La démonstration tient dans le fait que :

$$u_n < -A \;\Leftrightarrow\; -u_n > A$$

□

VI.2. Opérations - formes indéterminées

Dans la suite, on parle de *forme indéterminée* (et on note F.I.) quand on ne peut déterminer, de manière générale, la limite d'une opération sur les suites. Dans ce cas, il faudra faire une étude au cas par cas.

VI.2.a) Somme de deux suites

	Somme $u_n + v_n$		
v_n \ u_n	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$
ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Le cas de la somme de deux suites apporte une F.I. : $\boxed{\infty - \infty}$

VI.2.b) Produit de deux suites

	Produit $u_n \times v_n$				
v_n \ u_n	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

Le cas du produit de deux suites apporte une F.I. : $\boxed{0 \times \infty}$

VI.2.c) Passage à l'inverse

On suppose ici que l'on peut former le quotient $\frac{1}{u_n}$, ce qui revient à dire que $u_n \neq 0$, au moins à partir d'un certain rang.

	Inverse $\frac{1}{u_n}$			
u_n	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
Si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang	$\dfrac{1}{\ell}$	$+\infty$	0	
Si $u_n < 0$ à partir d'un certain rang	$\dfrac{1}{\ell}$	$-\infty$		0

VI.2.d) Quotient

		Quotient $\frac{u_n}{v_n}$				
v_n \ u_n		$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$		$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$		$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	$v_n>0$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
	$v_n<0$	$-\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$		0	0	0	F.I.	F.I.
$-\infty$		0	0	0	F.I.	F.I.

Le cas du quotient de deux suites apporte deux F.I. : $\boxed{\dfrac{0}{0} \quad ; \quad \dfrac{\infty}{\infty}}$

Remarque

- Dans le cas où $u_n \to 0$, on traite deux cas pour l'inverse $\dfrac{1}{u_n}$:
  - × soit $u_n > 0$ (au moins à partir d'un certain rang),
  - × soit $u_n < 0$ (au moins à partir d'un certain rang).

  Autrement dit, on suppose (u_n) de signe constant (au moins à partir d'un certain rang). Si ce n'est pas le cas, on peut démontrer que $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est divergente. En effet :
  - × si (w_n) est la suite extraite de (u_n) contenant les termes de (u_n) de signe strictement positif, alors (w_n) diverge vers $+\infty$,
  - × si (z_n) est la suite extraite de (u_n) contenant les termes de (u_n) de signe strictement négatif, alors (z_n) diverge vers $-\infty$.

  En vertu du théorème sur les suites extraites (*qui s'étend au cas des suites divegeant vers l'infini*), $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ n'admet pas de limite.

- Considérons par exemple $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

  Alors $u_n \to 0$ et $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{n}{(-1)^n} = (-1)^n\ n$.

  Ainsi, $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ n'admet pas de limite.

VI.2.e) Comment déterminer la limite d'une F.I.

Tout d'abord résumons les F.I. rencontrées lors de l'étude des différentes opérations algébriques :

$$\boxed{\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}}$$

Afin de lever une F.I., on pourra penser à utiliser les méthodes suivantes.

1) Factoriser par le terme dominant (*i.e.* celui ayant la plus forte croissance).

2) Penser à la quantité conjuguée.

Le point ***1)*** sera revu en fin de chapitre dans la section « Croissances comparées ».

Exercice 20
Déterminer les limites, lorsqu'elles existent, des suites suivantes.

a) $\left(\sqrt{n^2(n+1)} - n\right)$

b) $\left(\dfrac{n\,(\ln n)^5 - 2n^2 + 7}{-n^2 + \mathrm{e}^n}\right)$

c) $\left(\dfrac{n^3 - 2n^2 + 7}{7n^3 + n}\right)$

d) $\left(\sqrt{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} - n\right)$

Démonstration.

b) $u_n = \dfrac{n\,(\ln n)^5 - 2n^2 + 7}{-n^2 + \mathrm{e}^n} = \dfrac{-2n^2}{\mathrm{e}^n}\ \dfrac{\frac{n\,(\ln n)^5}{-2n^2} + 1 + \frac{7}{-2n^2}}{\frac{-n^2}{\mathrm{e}^n} + 1}$

Or on a :

× $\dfrac{n\,(\ln n)^5}{-2n^2} = -\dfrac{(\ln n)^5}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
(*cf* fin de chapitre)

× $\dfrac{7}{-2n^2} = -\dfrac{7}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

On en déduit que : $\dfrac{n\,(\ln n)^5}{-2n^2} + 1 + \dfrac{7}{-2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

De même, $\dfrac{-n^2}{\mathrm{e}^n} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $\dfrac{-n^2}{\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

Enfin, comme $\dfrac{-2n^2}{\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $u_n \to 0$. □

VI.3. Compatibilité avec la relation d'ordre

Proposition 21.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$$

a) *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*
On peut résumer cette propriété comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \leqslant v_n \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

b) *Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.*
On peut résumer cette propriété comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \leqslant v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty}$$

Démonstration.

a) L'idée de la démonstration est la suivante. Si u_n devient aussi grand que souhaité, comme $v_n \geqslant u_n$, v_n devient aussi que souhaité aussi.
Démontrons-le rigoureusement.

Soit $A > 0$.

- Comme $u_n \to +\infty$, il existe un rang n_1 à partir duquel : $u_n \geqslant A$.
- Notons $N = \max(n_0, n_1)$.
  À partir de ce rang N, on a : $v_n \geqslant u_n \geqslant A$.

Ceci démontre : $v_n \to +\infty$.

b) La démonstration est similaire. Si v_n devient aussi petit que souhaité, comme $u_n \leqslant v_n$, il en est de même pour u_n.

On peut aussi appliquer le résultat précédent à la suite $(-u_n)$ qui est telle que $-u_n \geqslant -v_n$ avec $-v_n \to +\infty$. □

VI.4. Compatibilité avec la valeur absolue

Théorème 20.

Soit (u_n) une suite réelle divergente de limite ∞ ($+\infty$ ou $-\infty$).

Alors la suite $(|u_n|)$ est divergente de limite $+\infty$.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty \ \Rightarrow\ |u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

Démonstration.
Supposons que (u_n) tend vers $+\infty$.

- À partir d'un certain rang n_0, les termes de la suite u_n sont positifs.
- Ainsi : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n = |u_n|$.

On en déduit que $|u_n| \to +\infty$.
Le cas où (u_n) tend vers $-\infty$ se traite de manière similaire. □

En fait, le théorème de composition des limites peut s'écrire avec des limites infinies. On notera $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble formé des réels et de $+\infty$ et $-\infty$.

Autrement dit : $\boxed{\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}}$

Théorème 21. *(Théorème de composition des limites)*

Soit (u_n) une suite réelle de limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet en a une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors la suite $(f(u_n))$ admet la limite ℓ.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to a \\ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{x\to a} f(x) = \ell}$$

Démonstration.
Encore une fois, c'est un résultat du chapitre limites / continuité d'une fonction (à venir !). □

VII. Les théorèmes de monotonie

VII.1. Théorème de convergence monotone

Théorème 22. *(Croissance et majoration)*
Soit (u_n) une suite de réels. Alors on a :

1)

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ croissante} \\ (u_n) \text{ majorée} \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \in \mathbb{R}}$$

- *Plus précisément, on démontre : $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (u_n)$.*
- *Ce qui permet d'assurer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$.*

2)

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ croissante} \\ (u_n) \text{ non majorée} \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \to +\infty}$$

Démonstration.

1) Technique. Il s'agit de démontrer : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (u_n)$.

- Tout d'abord, comme la suite (u_n) est majorée, alors elle admet une borne supérieure. Ainsi $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (u_n)$ existe.
- Soit $\varepsilon > 0$.
  - × Par caractérisation de la borne supérieure :

  $$\left\{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ell - \varepsilon < u_{n_0} \end{array}\right.$$

    En particulier, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\ell - \varepsilon < u_{n_0}$.
  - × Or la suite (u_n) est croissante. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$: $u_n \geqslant u_{n_0}$. On en déduit :

  $$\forall n \geqslant n_0, \quad \ell - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant u_n$$

× Finalement, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\ell - \varepsilon \; < \; u_n \; \leqslant \; \ell \; < \; \ell + \varepsilon$$

Autrement dit : $|u_n - \ell| < \varepsilon$. On a bien démontré : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Il reste à démontrer : $\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ croissante} \\ u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell\end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$.

C'est immédiat car on sait que $\ell = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

2) Soit (u_n) une suite croissante.
On démontre par l'absurde que : (u_n) non majorée $\Rightarrow$ $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. □

Théorème 23. *(Décroissance et minoration)*
Soit (u_n) une suite de réels. Alors on a :

1)

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(u_n) \textit{ décroissante} \\ (u_n) \textit{ minorée}\end{array}\right\} \Rightarrow \ (u_n) \textit{ converge vers une limite } \ell \in \mathbb{R}}$$

- *Plus précisément, on démontre : $\ell = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} (u_n)$.*
- *Ce qui permet d'assurer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \ell$.*

2)

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(u_n) \textit{ décroissante} \\ (u_n) \textit{ non minorée}\end{array}\right\} \Rightarrow \ u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty}$$

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite (v_n) de terme général $v_n = -u_n$. En effet :

× (u_n) décroissante $\Leftrightarrow$ $(-u_n)$ croissante,

× (u_n) minorée $\Leftrightarrow$ $(-u_n)$ minorée. □

Remarque
On peut, dans un exercice, avoir à démontrer que :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ croissante} \\ u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell\end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell}$$

Soit (u_n) une suit réelle. Supposons que (u_n) est :

× croissante,

× convergente vers ℓ.

On procède par l'absurde.
Supposons : `NON`$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell)$.
Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell$.
Comme (u_n) est croissante, on a : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0}$.
Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant u_{n_0}$.
En combinant avec la première inégalité, on a alors : $\ell \geqslant u_{n_0} > \ell$.

Exercice 21
On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(2u_n + 1)\end{array}\right.$

a. Montrer que (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

b. Étudier le sens de variation de (u_n).

c. En déduire que (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ telle que : $1 \leqslant \ell \leqslant 2$.

VII.2. Suites adjacentes

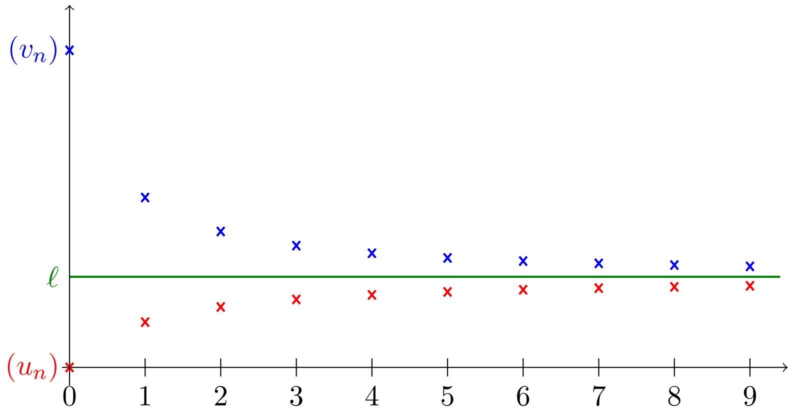
Définition
Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si :

1) (u_n) est croissante,

2) (v_n) est décroissante,

3) $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Représentation graphique



Théorème 24.
Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes et admettent la même limite.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{1)}\ (u_n) \text{ est croissante,} \\ \textit{2)}\ (v_n) \text{ est décroissante,} \\ \textit{3)}\ u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont convergentes} \\ \text{et admettent la même limite} \end{array}$$

Démonstration.
Il s'agit essentiellement de démontrer que la représentation graphique précédente est correcte.

a) La suite $(v_n - u_n)$ est décroissante
Soit $n \in \mathbb{N}$. $(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = \underbrace{v_{n+1} - v_n}_{\leqslant 0} + \underbrace{u_n - u_{n+1}}_{\leqslant 0} \leqslant 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$
Par hypothèse, $(v_n - u_n)$ est convergente.
Par théorème, elle est donc bornée.
Cette suite étant décroissante et minorée, le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \ \geqslant\ \inf_{n\in\mathbb{N}} (v_n - u_n) = 0$$

(comme précisé dans la remarque suivant le théorème de convergence monotone, il faudrait faire cette démonstration par l'absurde)

c) La suite (u_n) est majorée et la suite (v_n) est minorée
On peut maintenant démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_0$.

- En effet, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant v_0$ puisque (v_n) est décroissante.
- Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.

De manière analogue, on démontre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant v_n$.

d) Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite

- (u_n) est croissante et majorée (par v_0) donc convergente vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$.
- (v_n) est décroissante et minorée (par u_0) donc convergente vers $\ell_2 \in \mathbb{R}$.

Ainsi, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_1 - \ell_2$.
(la première égalité est seulement vérifiée pour des suites convergentes)
Or par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.
On en conclut que : $\ell_1 = \ell_2$. □

Exercice 22
On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

a) Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ son adjacentes.

b) En déduire que la suite (S_n) converge.

Démonstration.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (S_{2n}) est croissante. En effet :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

- (S_{2n-1}) est décroissante. En effet :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)-1} - S_{2n-1} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} \leqslant 0 \end{aligned}$$

- $S_{2n} - S_{2n-1} = \dfrac{(-1)^{2n}}{2n} = \dfrac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, les suites (S_{2n}) et (S_{2n-1}) sont adjacentes.
Elles sont donc convergentes vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

b) Les termes d'indice pair de (S_n) sont aussi proches que souhaité de ℓ.
C'est aussi le cas des éléments d'indice impair.
Ainsi, tous les éléments de (S_n) sont aussi proches que souhaité de ℓ.
On en conclut que (S_n) est convergente, de limite ℓ. □

VIII. Comportement asymptotique des suites usuelles

VIII.1. Suites arithmétiques

Théorème 25.
Soit (u_n) une suite arithmétique **réelle** *de raison r.*

1) *Si $r = 0$, alors (u_n) est constante et converge donc vers u_0.*

2) *Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*

3) *Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Démonstration.

1) $u_n = u_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_0$.

2) (u_n) est croissante et non majorée.

3) (u_n) est décroissante et non minorée. □

VIII.2. Suites géométriques

Théorème 26.
Soit q un réel tel que $q \neq 0$.

1) *Si $q = 1$, alors (q^n) est constante $(= 1)$ et converge donc vers 1.*

2) *Si $q > 1$, alors (q^n) diverge et : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.*

3) *Si $|q| < 1$, alors (q^n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.*

4) *Si $q \leqslant -1$, alors (q^n) n'admet pas de limite.*

Démonstration.

1) $q^n = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

2) $\dfrac{q^{n+1}}{q^n} = q > 0$ donc (q^n) est (strictement) croissante.
Supposons par l'absurde que (q^n) est majorée.

Il existe alors $A>0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ q^n \leqslant A$.

Or : $q^n \leqslant A \ \Leftrightarrow\ n \ln q \leqslant \ln A \ \Leftrightarrow\ n \leqslant \dfrac{\ln A}{\ln q}$

Notons alors $n_0 = \left\lfloor \dfrac{\ln A}{\ln q} \right\rfloor + 1$.

Ainsi, $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_0 > \dfrac{\ln A}{\ln q}$. Or cette égalité équivaut à $q^{n_0} > A$.

Ceci contredit l'hypothèse.
(q^n) est croissante non majorée donc diverge vers $+\infty$.

3) $|q^n| = |q|^n$ et $(|q^n|)$ est décroissante et minorée par 0.
Ainsi, $(|q|^n)$ est convergente vers $\ell \geqslant 0$. On peut alors montrer par l'absurde que ℓ ne peut être strictement positive. On en conclut que $\ell = 0$.
Ainsi, $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (cf remarque suivant le théorème 16).

4) Notons $a = -q$. Alors $a \geqslant 1$.

Si $a = 1$: alors $q^n = (-1)^n$ et donc (q^n) n'a pas de limite.

Si $a > 1$: alors $q^n = (-a)^n = (-1)^n\ a^n$.

Ainsi, $q^{2n} = a^{2n} \to +\infty$ et $q^{2n+1} = -a^{2n+1} \to -\infty$.
(q^n) admet deux sous-suites divergeant vers des infinis différents. On en conclut que (q^n) est divergente sans limite infinie. □

Remarque

- Dans ce théorème, nous traitons seulement un cas particulier des suites géométriques : celles dont le premier terme u_0 vaut 1.
- De manière générale, une suite (u_n) admet pour terme général : $u_n = q^n \times u_0$ où $q \neq 0$ est la raison de (u_n). Le théorème précédent s'adapte en prenant en compte la valeur de u_0.
- Par exemple, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ si $q > 1$ et $u_0 < 0$.
- On déduit de ce théorème que : $e^n \to +\infty$, $\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^n \to +\infty$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$.

IX. Croissances comparées

IX.1. Négligeabilité

Définition Négligeabilité

Soit (u_n) une suite numérique.

Soit (v_n) une suite telle que $v_n \neq 0$ (à partir d'un certain rang).

- On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) (ou **dominée** par (v_n)) si :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0}$$

- Lorsque (u_n) est négligeable devant (v_n), on note $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.
- À l'oral, on dit que « u_n est un petit o de v_n ».
(o = 15ème lettre de l'alphabet)

Remarque

- On s'intéresse ici au comportement asymptotique (à l'infini) des suites. Plus précisément, on cherche ici à les classer suivant leur dominance, ce dont on se sert lors de la « mise en facteur du terme dominant ».
- Lorsque $u_n = o(v_n)$, on pourra utiliser, la notation $u_n << v_n$.
- Cette notation est parfois trompeuse.
Il ne faut surtout pas confondre : $u_n << v_n$ et $u_n \leqslant v_n$.
(d'ailleurs $(u_n << v_n) \not\Rightarrow (u_n \leqslant v_n)$ *et* $(u_n \leqslant v_n) \not\Rightarrow (u_n << v_n)$*)*
- On réservera donc cette notation pour l'écriture d'échelles asymptotiques (*cf* théorème 29).

Théorème 27.

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^b}{n^a} = 0}$$

$$\boxed{\forall a > 0, \forall q > 1, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0}$$

Remarque

- Ceci signifie que pour tout $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$: $(\ln n)^b << n^a << q^n$.
- On dira que la croissance logarithmique est beaucoup plus faible que la croissance polynomiale qui est elle-même beaucoup plus faible que la croissance exponentielle.
- Il faut savoir lire ce théorème dans l'autre sens :

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, q > 1, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{(\ln n)^b} = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^a} = +\infty}$$

- On en déduit aussi que : $\boxed{\forall a > 0, |q| < 1, \quad \lim_{n\to+\infty} n^a\, q^n = 0}$

Théorème 28. *(Critère de d'Alembert)*
Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

1) *Si $\ell < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$*

2) *Si $\ell > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$*

3) *Si $\ell = 1$, on ne peut conclure par ce théorème.*

Démonstration.
Non faite ici. Se reporter au TD. *(résultat non exigible)* □

Ce théorème permet la comparaison des suites (n^a), (q^n), $(n!)$, (n^n).
Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 29. *(Échelle de comparaison asymptotique)*
Pour tout $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$, on a :

$$\boxed{(\ln n)^b \quad << \quad n^a \quad << \quad q^n \quad << \quad n! \quad << \quad n^n}$$

IX.2. Équivalence

Définition Équivalence

Soit (u_n) une suite numérique.

Soit (v_n) une suite telle que $v_n \neq 0$ (à partir d'un certain rang).

- On dira que (u_n) est **équivalente** à (v_n) et on notera $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1}$$

Remarque

- On s'intéresse encore au comportement asymptotique (à l'infini) des suites. Plus précisément, dire que (u_n) est (v_n) sont équivalentes, c'est dire que ces deux suites ont même comportement asymptotique.
- Trouver un équivalent (v_n) à une suite (u_n) c'est trouver une suite (v_n) possédant le même comportement asymptotique que (v_n) et dont l'expression est plus simple.
  ↪ c'est la démarche que nous avons suivi lors de la recherche de limite d'une suite (u_n) lorsque l'on a mis en facteur le terme dominant.
  Ce terme dominant est en fait un équivalent de u_n.

Théorème 30.

Soit (u_n), (v_n), (w_n), (z_n) des suites numériques.
(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang)

L'opérateur $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ vérifie les propriétés suivantes.

1) *Réflexivité :*

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$$

2) *Symétrie :*

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \ \Rightarrow\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$$

3) *Transitivité :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \end{array}\right\} \Rightarrow\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n}$$

4) *Compatibilité avec le produit :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n \end{array}\right\} \Rightarrow\ u_n \times w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \times z_n}$$

5) *Compatibilité avec le quotient :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n \end{array}\right\} \Rightarrow\ \frac{u_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{z_n}}$$

6) *Équivalent et limites : soit $\ell \in \mathbb{K} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n}{u_n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

2) Il suffit d'écrire : $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{\frac{u_n}{v_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1} = 1$.

3) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$.

4) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n \times w_n}{v_n \times z_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{w_n}{z_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$.

5) Il suffit d'écrire : $\dfrac{\frac{u_n}{w_n}}{\frac{v_n}{z_n}} = \dfrac{u_n}{w_n} \times \dfrac{z_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$.

6) Il suffit d'écrire : $u_n = \dfrac{u_n}{v_n}\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times \ell = \ell$. □

Remarque

- La propriété ***6)*** peut s'exprimer comme suit.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui admettent chacune une limite (éventuellement infinie). On a alors :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n}$$

- Ce résultat n'est pas une équivalence dans le cas général. En effet :
  - × Si $u_n = n$ et $v_n = n^2$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ mais $\cancel{u_n \sim v_n}$.
  - × Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ mais $\cancel{u_n \sim v_n}$.
- Dans le cas où (u_n) et (v_n) sont convergentes de même limite $\ell \neq 0$, la réciproque est bien vérifiée. En effet :

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell} = 1$$

Remarque

Le théorème précédent stipule que l'opérateur $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ est compatible avec les opérations de produit et quotient.

Il faut faire attention, ce n'est pas le cas de toutes les opérations.

1) Considérons l'exemple suivant.

$$\left.\begin{array}{l} u_n = n + \sqrt{n} \\ v_n = n + \ln(n) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

$$\left.\begin{array}{l} w_n = -n \\ z_n = -n \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n$$

mais $\sqrt{n} \;=\; \cancel{u_n + w_n \sim v_n + z_n} \;=\; \ln(n)$.

⚠ $\boxed{\text{On ne peut sommer des équivalents !}}$

2) Considérons l'exemple suivant.

$$\left.\begin{array}{l} u_n = n + 1 \\ v_n = n \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

mais $\mathrm{e}^{n+1} \;=\; \cancel{\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}} \;=\; \mathrm{e}^{n}$ puisque $\dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^{n}} = \mathrm{e} \;\cancel{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}}\; 1$

⚠ $\boxed{\text{De manière générale, on en peut appliquer de fonction de part et d'autre d'une équivalence !}}$

Ici, on avait en fait le résultat suivant :

$$\boxed{\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{v_n} \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{v_n}} \to 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{u_n - v_n} \to 1 \;\Leftrightarrow\; u_n - v_n \to 0}$$

Exercice 23

Limite de la suite (u_n) de terme général : $u_n = \dfrac{(3n+4)^3(8n^{-2}+2n^{-4})}{9n+10}$?

1) $3n + 4 \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n$ car $\dfrac{3n+4}{3n} = 1 + \dfrac{4}{3n} \to 1$

Ainsi : $(3n+4)^3 = (3n+4)(3n+4)(3n+4) \underset{n\to+\infty}{\sim} (3n)(3n)(3n) = 3^3 n^3$.

2) $8n^{-2} + 2n^{-4} \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^{-2}$ car $\dfrac{8n^{-2}+2n^{-4}}{8n^{-2}} = 1 + \dfrac{2n^{-4}}{8n^{-2}} = 1 + \dfrac{1}{4n^2} \to 1$

On en déduit que : $(3n+4)^3(8n^{-2}+2n^{-4}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^3 n^3 \times 8n^{-2} = 3^3\ 8n$

3) $9n + 10 \underset{n\to+\infty}{\sim} 9n$ car $\dfrac{9n+10}{9n} = 1 + \dfrac{10}{9n} \to 1$

On en déduit que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3^{\cancel{3}}\ 8\cancel{n}}{\cancel{9}\cancel{n}} = 3 \times 8 = 24$.

Ainsi : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 24$.