CH II : Récurrence, calculs de sommes et produits

I. Récurrence

Dans la suite de ce paragraphe, on s'intéresse à des propriétés $\mathcal{P}$ définies sur l'ensemble des entiers naturels. La notation n désignera un entier naturel.

Exemple

1) $\mathscr{P}(n)$: $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7

2) $\mathscr{P}(n)$: $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est un multiple de 11

3) $\mathscr{P}(n)$: $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$

4) $\mathscr{P}(n)$: $2^n \leqslant n!$

Le but de cette section est de définir une méthode de raisonnement qui nous permettra de montrer que ce type de propriétés est vérifié pour tout entier naturel n. Autrement dit, être capable de prouver un énoncé du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ est un multiple de } 7}_{\mathscr{P}(n)}$$

Remarque

- La propriété ($\mathscr{P}(n)$: $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7) dépend de n.
- Par contre, la propriété a : $(\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n))$ est une propriété **indépendante** de n puisque n est alors porté par un quantificateur. La variable n est muette et on pourrait changer son nom sans changer le sens de a.
- On a notamment :

$$a \ \Leftrightarrow\ \forall\ \mathit{truc} \in \mathbb{N},\ 3^{2\times \mathit{truc}+1} + 2^{\mathit{truc}+2} \text{ est un multiple de } 7)$$

Par la suite, on gardera la notation n, plus adaptée.

I.0. Une première tentative de preuve

Intéressons-nous à cette propriété $\mathscr{P}(n)$: $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7 et tentons de voir si nous pouvons la démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a : $3^{2\times 0+1} + 2^{0+2} = 7$
$\hookrightarrow$ on en déduit que $\mathscr{P}(0)$ est vérifié

On a : $3^{2\times 1+1} + 2^{1+2} = 3^3 + 2^3 = 27 + 8 = 35 = 7 \times 5$
$\hookrightarrow$ on en déduit que $\mathscr{P}(1)$ est vérifié

On a : $3^{2\times 2+1} + 2^{2+2} = 3^5 + 2^4 = 243 + 16 = 259 = 7 \times 37$
$\hookrightarrow$ on en déduit que $\mathscr{P}(2)$ est vérifié

...
...

...

Remarque

- Nous avons montré $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$. Pour démontrer que la propriété est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$ il faudrait aussi démontrer $\mathscr{P}(4)$, $\mathscr{P}(5)$ ...
Ce type de démonstration n'est évidemment pas raisonnable puisqu'elle demande l'étude d'un nombre infini de cas.
- Changeons de point de vue. Au lieu de montrer chaque cas, on démontre que le passage d'un cas à un autre (symbolisé par la flèche) est valide.
- Supposons que l'on est capable de démontrer que tous ces passages (toutes les flèches rouges) sont valides.

Dans ce cas, si l'on sait que $\mathscr{P}(r)$ est vraie pour un rang $r \in \mathbb{N}$ alors :

- × $\mathscr{P}(r+1)$ est vraie (passage du rang r au rang $r+1$ valide),
- × ainsi $\mathscr{P}(r+2)$ est aussi vérifiée (puisque le passage du rang $r+1$ au rang $r+2$ valide),
- × et donc $\mathscr{P}(r+3)$ aussi ...

Au final, cela prouve que la propriété est vérifiée pour tous les rangs plus grands que r.

- Le **principe de récurrence** formalise ce mécanisme.

I.1. Principe de récurrence

Théorème 1. *Principe de récurrence*
Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ et telle que :

1. Initialisation *:* $\mathscr{P}(0)$ *est vérifiée*

2. Hérédité *:* $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1))$

Alors la propriété est vérifiée pour tout entier naturel n.

Autrement dit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)}$

Remarque

- À n fixé, la proposition $(\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1))$ signifie que le passage du rang n au rang $n+1$ est valide.
- La proposition $(\forall n \in \mathbb{N}, (\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)))$ signifie donc que tous les passages d'un rang au suivant sont valides.
- Le principe de récurrence s'appuie sur la définition axiomatique de $\mathbb{N}$. C'est l'ensemble :
  - × qui contient 0,
  - × qui contient le successeur de chacun de ses éléments.

  Procéder par récurrence, c'est montrer que l'ensemble des éléments vérifiant une propriété $\mathcal{P}$ est $\mathbb{N}$ via cette définition axiomatique.

I.2. Modèle de rédaction

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$. où $\mathscr{P}(n)$:
...

1. Initialisation : $\mathscr{P}(0)$?
...
D'où $\mathscr{P}(0)$.

2. Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* ...)
...
...
D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$.

Remarque *(erreurs classiques)*
Il est (malheureusement !) fréquent de voir dans les copies, les trois types d'erreurs suivantes.

1) Montrons par récurrence que : $\mathscr{P}(n)$.

↪ par récurrence, on démontre qu'une propriété est vraie **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, pas seulement à un rang n donné.

2) ...où $\mathscr{P}(n)$: $\cancel{\forall n \in \mathbb{N}}$, ...

↪ nous avons déjà discuté de ce point dans la première remarque du cours : une propriété commençant par $\forall n \in \mathbb{N}$ est indépendante de n !

3) Supposons que : $\cancel{\forall n \in \mathbb{N},}$ $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.

↪ ceci n'a pas de sens ! On ne peut supposer la propriété vraie pour tout n : c'est précisément ce que l'on souhaite démontrer.

Exemple
Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.

Notation : on définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$

où $\mathscr{P}(n)$: u_n est un multiple de 7.

1. **Initialisation**
On a : $u_0 = 3^{2.0+1} + 2^{0+2} = 3 + 2^2 = 7$. Ainsi, u_0 est un multiple de 7.
D'où $\mathscr{P}(0)$.

2. **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* u_{n+1} est un multiple de 7).
Par définition de u_{n+1} :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} \\ &= 3^{2n+3} + 2^{n+3} \\ &= 3^2(3^{2n+1}) + 2^{n+3} \\ &= 3^2(u_n - 2^{n+2}) + 2^{n+3} \\ &= 3^2\ u_n + 2^{n+3} - 3^2 \times 2^{n+2} \\ &= 9\ u_n + 2^{n+2}\ (2-9) \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence ($\mathscr{P}(n)$), on sait que u_n est un multiple de 7. Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $u_n = 7k$. On a donc :

$$u_{n+1} = 9(7k) + 2^{n+2}(-7) = 7\ (9\ k - 2^{n+2})$$

Ainsi, u_{n+1} est un multiple de 7. D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$.

I.3. Initialisation en n_0

On rencontrera souvent des énoncés du type : $\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n)$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$. Le schéma précédent s'adapte à ce type d'énoncé.

Théorème 2.
Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ et telle que :
1. Initialisation : $\mathscr{P}(n_0)$ *est vérifiée*
2. Hérédité : $\forall n \geqslant n_0,\ (\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1))$

Alors la propriété est vérifiée pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$.
Autrement dit : $\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n)}$

Exemple
Montrer que : $\forall n \geqslant 4,\ 2^n \leqslant n!$

Démontrons par récurrence : $\forall n \geqslant 4, \mathscr{P}(n)$

où $\mathscr{P}(n)$: $2^n \leqslant n!$.

1. **Initialisation**
On sait : $2^4 = 16$ et $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.
Or : $16 \leqslant 24$.
D'où $\mathscr{P}(0)$.

2. **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $2^{n+1} \leqslant (n+1)!$).
Remarquons tout d'abord : $2^{n+1} = 2 \times 2^n$.
Or, par hypothèse de récurrence ($\mathscr{P}(n)$), on sait : $2^n \leqslant n!$. D'où :

$$\begin{aligned} 2^{n+1} = 2 \times 2^n &\leqslant 2 \times n! \\ &\leqslant \underbrace{(n+1) \times n!}_{(n+1)!} \quad \textit{(car } 2 \leqslant n+1 \textit{ puisque } n \geqslant 4 \geqslant 1\textit{)} \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \geqslant 4,\ \mathscr{P}(n)$.

I.4. Récurrence double

Théorème 3.
Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ et telle que :

1. Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ *et* $\mathscr{P}(1)$ *sont vraies*
2. Hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathscr{P}(n) \texttt{ ET } \mathscr{P}(n+1) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2))$

Alors la propriété est vérifiée pour tout entier naturel $n \geqslant 0$.
Autrement dit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)}$

Exemple
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} - 3^n$.

Démontrons par récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$
où $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 2^{n+1} - 3^n$.

1. **Initialisation**
   - On sait : $u_0 = 1$ et $2^{0+1} - 3^0 = 2 - 1 = 1$.
     D'où $\mathscr{P}(0)$.
   - De plus : $u_1 = 1$ et $2^{1+1} - 3^1 = 4 - 3 = 1$.
     D'où $\mathscr{P}(1)$.
2. **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
   Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$.
   Démontrons $\mathscr{P}(n+2)$ (*i.e.* $u_{n+2} = 2^{n+3} - 3^{n+2}$)

   Par définition de u_{n+2} :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\ &= 5\ (2^{n+2} - 3^{n+1}) - 6(2^{n+1} - 3^n) && \textit{(par hypothèse de récurrence } (\mathscr{P}(n) \texttt{ ET } \mathscr{P}(n+1))\textit{)} \\ &= 2^{n+1}\ (5 \times 2 - 6) - 3^n\ (-6 + 3 \times 5) \\ &= 2^{n+1}\ 4 - 3^n\ 9\ =\ 2^{n+3} - 3^{n+2} \end{aligned}$$

   D'où $\mathscr{P}(n+2)$.

Par principe de récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$.

Remarque

- On peut aussi réaliser des récurrences triples, quadruples ...
- Le choix du type de récurrence à effectuer est dicté par la forme de l'objet considéré dans la propriété. Ici, il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. La récurrence double est donc plus adaptée.
- Le principe de récurrence double peut sembler plus puissant que le principe de récurrence simple. Ces principes sont en fait équivalents.
- Plus précisément, on peut résoudre l'exercice précédent à l'aide d'une récurrence simple. On démontre alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathscr{P}(n) \texttt{ ET } \mathscr{P}(n+1))$.
  (ce qui démontre notamment que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$)

I.5. Récurrence forte

Théorème 4.
Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ et telle que :

1. Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ *est vraie*
2. Hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathscr{P}(0) \texttt{ ET } \mathscr{P}(1) \texttt{ ET } \mathscr{P}(2) \texttt{ ET } \cdots \texttt{ ET } \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1))$

Alors la propriété est vérifiée pour tout entier naturel $n \geqslant 0$.
Autrement dit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)}$

Exemple
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \end{array}\right.$$

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2^n$.

Démontrons par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$

où $\mathscr{P}(n)$: $u_n \leqslant 2^n$.

1. **Initialisation**

- On sait : $u_0 = 1$ et $2^{0+1} - 3^0 = 2 - 1 = 1$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.

2. **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathscr{P}(k)$ (on suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang n).

Démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \leqslant 2^{n+1}$)

Par définition de u_{n+1} :

$$u_{n+1} = \underbrace{u_0}_{\substack{\leqslant 2^0 \\ (d'après \\ \mathscr{P}(0))}} + \underbrace{u_1}_{\substack{\leqslant 2^1 \\ (d'après \\ \mathscr{P}(1))}} + \ldots + \underbrace{u_n}_{\substack{\leqslant 2^n \\ (d'après \\ \mathscr{P}(n))}}$$

Ainsi : $u_{n+1} \leqslant 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1 \leqslant 2^{n+1}$.

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$.

Remarque

- Encore une fois, c'est la forme de l'objet considéré dans la propriété qui nous a amené à faire une récurrence forte : l'objet u_{n+1} est défini à l'aide de tous les u_i précédents.
- Cet exemple est en fait artificiel puisque l'on pourrait démontrer qu'à partir du rang 1, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 2. On a en effet : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2u_n$.
- Le principe de récurrence forte peut sembler plus puissant que le principe de récurrence simple. Ces principes sont en fait équivalents.
- Plus précisément, on peut résoudre l'exercice précédent à l'aide d'une récurrence simple. On démontre alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ (\forall k \leqslant n,\ \mathscr{P}(k))$.
  (ce qui démontre notamment que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$)

II. Sommes finies

En mathématiques, il est fréquent de tomber sur des quantités définies comme des sommes finies. Considérons les exemples suivants.

Exemple de sommes finies

1) $3^4 + 3^5 + 3^6 + \cdots + 3^{15}$

2) $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{10}{1024}$

3) $u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \cdots + \frac{u^n}{n}$

4) $2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$

La manière dont on a défini ces quantités n'est pas très satisfaisante. On utilise notamment la notation « $\cdots$ » qui n'est pas rigoureuse. On va donc introduire un symbole qui va nous permettre de définir rigoureusement ces quantités.

II.1. Définition

Dans la suite de cette section, les notations $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ désignent deux suites complexes.

Notation Symbole $\sum$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La somme finie des éléments $u_1, u_2, \dots, u_n$ est notée comme suit.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} u_i \;=\; u_1 + u_2 + \cdots + u_n}$$

- La variable i est appelée variable de sommation.
- Plus généralement, on peut réaliser la somme d'un nombre fini d'éléments, indexé par un sous-ensemble fini I de $\mathbb{N}$. On notera alors $\sum\limits_{i\in I} u_i$.

  Par exemple : $\sum\limits_{i\in\{3,5,6,9\}} u_i = u_3 + u_5 + u_6 + u_9$.
- Avec cette notation, on a : $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i = \sum\limits_{i\in[\![1,n]\!]} u_i$

  (i prend toutes les valeurs entières entre 1 et n)

Remarque *Indices de sommation*

- La variable de sommation est dite **muette** : changer son nom n'affecte pas le calcul de la somme.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} u_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} u_j \;=\; \sum_{k=1}^{n} u_k}$$

- Les sommes ne commencent pas forcément à l'indice 1.

  On peut évidemment construire les sommes $\sum\limits_{i=0}^{n} u_i$, $\sum\limits_{i=2}^{n} u_i$, $\sum\limits_{i=3}^{n} u_i$ et plus généralement $\sum\limits_{i=m}^{n} u_i$.
- Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. On utilisera, sans distinction, l'une ou l'autre des notations suivantes :

$$\boxed{\sum_{i=m}^{n} u_i \;=\; \sum_{i\in[\![m,n]\!]} u_i \;=\; \sum_{m\leqslant i\leqslant n} u_i}$$

  On a notamment, si $m > n$: $\sum\limits_{i=m}^{n} u_i \;=\; \sum\limits_{i\in\varnothing} u_i \;=\; 0$

  et si $m = n$: $\sum\limits_{i=m}^{m} u_i \;=\; u_m$

Exercice 1

Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les sommes précédentes.

1) $2^0 + 2^1 + 2^3 + \ldots + 2^n = \sum\limits_{i=0}^{n} 2^i$

2) $3^4 + 3^5 + 3^6 + \cdots + 3^{15} \;=\; \sum\limits_{i=4}^{15} 3^i$

3) $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{10}{1024} \;=\; \sum\limits_{i=1}^{10} \dfrac{i}{2^i}$

4) $u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \cdots + \frac{u^n}{n} \;=\; \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{u^i}{i}$

5) $2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50 \;=\; \sum\limits_{i=1}^{25} (-1)^{i+1}\, 2i$

II.2. Règles de calcul

Proposition 1.

1) **Sommation d'une constante**
Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m \leqslant n$:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a \ = \ n \times a} \qquad \boxed{\sum_{i=m}^{n} a \ = \ (n-m+1) \times a}$$

- *On notera au passage qu'une somme indexée par $i \in [\![m,n]\!]$ contient $n-m+1$ termes.*
- *Ces formules sont valables pour tout élément a* **indépendant de l'indice de sommation** *i.*
- *Par exemple, on a :*

$$\sum_{i=4}^{13} 7 \ = \ (13-4+1) \times 7 \ = \ 10 \times 7 \ = \ 70$$

2) **Sommation par paquets**
Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m \leqslant n$:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} u_i \ = \ \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{i=m+1}^{n} u_i}$$

- *Par analogie avec le calcul intégral, on parle aussi de* **relation de Chasles** *sur les sommes finies.*
- *Par exemple, on a :*

$$\begin{aligned} \sum_{i=4}^{13} 7 \ &= \ \sum_{i=4}^{9} 7 + \sum_{i=10}^{13} 7 \\ &= \ (9-4+1) \times 7 + (13-10+1) \times 7 \\ &= \ 6 \times 7 + 4 \times 7 \ = \ (6+4) \times 7 \ = \ 70 \end{aligned}$$

3) **Linéarité de l'opérateur $\sum$**
Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (\lambda u_i) \ = \ \lambda u_1 + \lambda u_2 + \cdots + \lambda u_n = \lambda \sum_{i=1}^{n} u_i}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} (u_j + v_j) = \sum_{j=1}^{n} u_j + \sum_{j=1}^{n} v_j}$$

- *La première formule est valable pour tout λ* **indépendant de l'indice de sommation** *i.*
- *Par exemple, si $q \neq 1$, on a :*

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{6} (3i - 5\ q^i) + \sum_{i=3}^{6} (7-2i) \ &= \ \sum_{i=0}^{6} 3i - \sum_{i=0}^{6} 5\ q^i + \sum_{i=3}^{6} 7 - \sum_{i=3}^{6} 2i \\ &= \ 3\sum_{i=0}^{6} i - 5\sum_{i=0}^{6} q^i + \sum_{i=3}^{6} 7 - 2\sum_{i=3}^{6} i \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} 3 \sum_{i=0}^{6} i - 2 \sum_{i=3}^{6} i \ &= \ 3\ (\sum_{i=0}^{2} i + \sum_{i=3}^{6} i) - 2 \sum_{i=3}^{6} i \\ &= \ 3 \sum_{i=0}^{2} i + 3 \sum_{i=3}^{6} i - 2 \sum_{i=3}^{6} i \\ &= \ 3 \sum_{i=0}^{2} i + \sum_{i=3}^{6} i \\ &= \ 3\ \frac{3 \times (2+0)}{2} + \frac{4 \times (3+6)}{2} \ = \ 9 + 18 \ = \ 27 \end{aligned}$$

et : $5 \displaystyle\sum_{i=1}^{6} q^i \ = \ 5\ \frac{1-q^7}{1-q}$

enfin : $\displaystyle\sum_{i=3}^{6} 7 \ = \ (6-3+1) \times 7 \ = \ 28$

4) Changements d'indices

Décalage d'indice : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=0}^{n} u_j \;=\; \sum_{k=1}^{n+1} u_{k-1} \;=\; \sum_{\ell=2}^{n+2} u_{\ell-2}}$

Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$.
$$\sum_{j=m}^{n} u_j \;=\; \sum_{k=0}^{n-m} u_{k+m} \quad \textit{en posant } k = j-m$$
$$\;=\; \sum_{i=m+\ell}^{n+\ell} u_{i-\ell} \quad \textit{en posant } i = j+\ell$$

Sommer dans l'autre sens : Soit $n \in \mathbb{N}$. $\boxed{\sum_{j=0}^{n} u_j \;=\; \sum_{i=0}^{n} u_{n-i}}$

On peut écrire une formule similaire pour les sommes commençant à l'indice 1 $\boxed{\sum_{j=1}^{n} u_j \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} u_{n-i}}$

Exercice 2
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)\sqrt{n-k} \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} (n-i+1)\sqrt{i}$$

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note : $u_k = (k+1)\sqrt{n-k}$. À l'aide de la formule précédente, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k \;&=\; \sum_{k=0}^{n-1} u_{n-k}\\ &=\; \sum_{k=0}^{n-1} ((n-k)+1)\sqrt{n-(n-k)}\\ &=\; \sum_{k=0}^{n-1} (n-k+1)\sqrt{k}\end{aligned}$$

5) Sommes télescopiques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) \;=\; u_{n+1} - u_1}$$

En effet :
$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k)\\ =\;& \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k\\ =\;& \sum_{k=2}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k && \textit{(par changement d'indice)}\\ =\;& \Big(\cancel{\sum_{k=2}^{n} u_k} + \sum_{k=n+1}^{n+1} u_k\Big) - \Big(\sum_{k=1}^{1} u_k + \cancel{\sum_{k=2}^{n} u_k}\Big) && \textit{(par sommation par paquets)}\\ =\;& u_{n+1} - u_1\end{aligned}$$

- *On peut généraliser la formule précédente :*

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) \;=\; u_{n+1} - u_m}$$

Exercice 3
Soit $n \geqslant 2$. On souhaite calculer la somme $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k}$.

1) Démontrer : $\frac{1}{k^2-k} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k-1}$, où α et β sont deux réels que vous déterminerez.

2) Calculer S_n à l'aide de sommes télescopiques.

Remarque

- *On a utilisé un cas un peu particulier de la sommation par paquets où l'on a écarté seulement un terme de la somme. On peut directement écrire :*

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \;=\; u_1 + \sum_{i=2}^{n} u_i \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} u_i + u_n$$

6) Sommation sur une union d'ensembles

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$.

$$\boxed{\sum_{i \in A \cup B} u_i \;=\; \sum_{i\in A} u_i + \sum_{i \in B} u_i - \sum_{i \in A\cap B} u_i}$$

- *Par exemple, si on prend $A = \{2,4,5,9\}$ et $B = \{1,2,9,11\}$, on a :*
  - × $A \cup B = \{1,2,4,5,9,11\}$
  - × $A \cap B = \{2,9\}$
  - × $\displaystyle\sum_{i\in A\cup B} u_i \;=\; u_1+u_2+u_4+u_5+u_9+u_{11}$
  - × $\displaystyle\sum_{i\in A\cap B} u_i \;=\; u_2+u_9$

  Enfin, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in A} u_i + \sum_{i \in B} u_i &= (\underline{u_2}+u_4+u_5+\underline{u_9}) + (u_1+\underline{u_2}+\underline{u_9}+u_{11}) \\ &= (u_1+u_2+u_4+u_5+u_9+u_{11}) + (u_2+u_9)\end{aligned}$$

Exercice 4

Soient a et b deux réels. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner de même une factorisation de $a^n - b^n$.

II.3. Sommes usuelles

II.3.a) Sommes des n premiers entiers

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $0 \leqslant m \leqslant n$.

$$S_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} k \;=\; \boxed{\sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$S_n - S_{m-1} \;=\; \boxed{\sum_{k=m}^{n} k \;=\; \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}}$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n)$

où $\mathscr{P}(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n(n+1)}{2}$.

▶ **Initialisation**

- On remarque : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$ et $\dfrac{1(1+1)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$. D'où $\mathscr{P}(1)$.

▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k \;=\; \frac{(n+1)(n+2)}{2}$)

Or on a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \textit{(par hypothèse de récurrence } \mathscr{P}(n)\textit{)} \\ &= \frac{n+1}{2}(n+2)\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n)$. □

Remarque

- La formule $(S_n - S_{m-1})$ peut se retenir comme étant le résultat du **demi-produit** :
  - × **du nombre de termes** de la somme $(n-m+1)$,
  - × **par la somme** $(n+m)$ formée **du** 1^{er} **terme** (m) **et du dernier** (n).
- Cette formule se démontre à l'aide de la précédente.

  Remarquons tout d'abord : $\sum\limits_{k=1}^{n} k \ = \ \sum\limits_{k=1}^{m-1} k + \sum\limits_{k=m}^{n} k$.

  On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{m-1} k \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m-1)m}{2} = \frac{n^2+n-m^2+m}{2} \\ &= \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}\end{aligned}$$

(on note que $P(n) = n^2+n-m^2+m$ est un polynôme de degré 2 en la variable n ; il admet $-m$ comme racine ; on peut donc le factoriser par $(n+m)$)

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut la somme des n premiers entiers naturels pairs ? impairs ?

Démonstration.

Notons U_n la somme des n premiers entiers pairs et V_n la somme des n premiers entiers impairs. On a alors :

- $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (2k) = 2\sum\limits_{k=1}^{n} k = \cancel{2}\dfrac{n(n+1)}{\cancel{2}} = n(n+1)$
- D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}V_n &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k) - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k - n \\ &= \cancel{2}\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - n = n((n+1)-1) = n^2\end{aligned}$$

□

II.3.b) Sommes des n premiers carrés d'entiers

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathscr{P}(n)$

où $\mathscr{P}(n)$: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \ = \ \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- ▸ **Initialisation**
  - On remarque : $\sum\limits_{k=1}^{1} k^2 = 1^2$ et $\dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$.

  D'où $\mathscr{P}(1)$.

- ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 \ = \ \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$)

  On écrit :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \Big(\sum_{k=1}^{n} k^2\Big) + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \textit{(par hypothèse de récurrence } \mathscr{P}(n)\textit{)} \\ &= \frac{n+1}{6}\,(n(2n+1)+6(n+1)) \\ &= \frac{n+1}{6}\,(2n^2+7n+6) = \frac{n+1}{6}\,(n+2)(2n+3)\end{aligned}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathscr{P}(n)$.

(on note que $P(n) = 2n^2+7n+6$ est un polynôme de degré 2 en la variable n ; il admet -2 comme racine ; on peut donc le factoriser par $(n+2)$) □

II.3.c) Sommes des n premiers cubes d'entiers

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}} = {S_n}^2$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathscr{P}(n)$

où $\mathscr{P}(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 \ = \ \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

▸ **Initialisation**

- On remarque : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3$ et $\dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$.

  D'où $\mathscr{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 \ = \ \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$)

On écrit :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 \ &= \ \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \\
&= \ \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence } \mathscr{P}(n)\textit{)} \\
&= \ \frac{(n+1)^2}{4} \left(n^2 + 4(n+1)\right) \\
&= \ \frac{(n+1)^2}{4} \left(n^2 + 4n + 4\right) \ = \ \frac{(n+1)^2}{4} (n+2)^2
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathscr{P}(n)$. □

Remarque

- Même si les formules font apparaître des divisions par 2, 6 et 4, il est évident que la somme des n premiers entiers, carrés, cubes a un résultat entier.
- On peut démontrer ces formules de manière directe. Par exemple, pour la somme des n premiers entiers, on commence par remarquer :

$$(k+1)^2 - k^2 \ = \ 2k+1$$

On en déduit :
$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right) & = & 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
(n+1)^2 - 1^2 & & 2\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right) + n
\end{array}$$

et enfin :

$$\begin{aligned}
2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) \ &= \ (n+1)^2 - 1^2 - n \ = \ n^2 + 2n + \cancel{1} - \cancel{1} - n \\
&= \ n^2 + n \ = \ n(n+1)
\end{aligned}$$

II.3.d) Sommes géométriques

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $0 \leqslant m \leqslant n$.

$$\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=m}^{n} q^k \ = \ \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}}$$

Remarque

- Si $q = 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k \ = \ \sum_{k=0}^{n} 1^k \ = \ \sum_{k=0}^{n} 1 \ = \ n+1$
- Si $q = 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k \ = \ \sum_{k=m}^{n} 1^k \ = \ \sum_{k=m}^{n} 1 \ = \ n-m+1$

Évidemment, on peut démontrer cette formule par récurrence sur n.
Mais il est plus simple ici de faire une démonstration directe.

Démonstration.
Soient $q \in \mathbb{R}$ et $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $m \leqslant n$. Alors :

$$\begin{aligned}(1-q) \sum_{k=m}^{n} q^k &= \sum_{k=m}^{n} q^k - \sum_{k=m}^{n} q^{k+1} \\ &= \sum_{k=m}^{n} (q^k - q^{k+1}) \ = \ q^m - q^{n+1}\end{aligned}$$

□

Exemple
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes finies suivantes.

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{4^{k+1}}$ ***b.*** $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} k\ (3k^2-2)$

a. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note : $u_k = \dfrac{3^k}{4^{k+1}} = \dfrac{3^k}{4 \times 4^k} = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{3^k}{4^k} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^k$.

Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{4}\,\frac{(\frac{3}{4})^1 - (\frac{3}{4})^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} \\ &= \frac{\cancel{1}}{\cancel{4}}\,\frac{\frac{3}{4} - (\frac{3}{4})^{n+1}}{\cancel{\frac{1}{4}}} = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = \frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{5} k\ (3k^2-2) &= \sum_{k=0}^{5} (3k^3 - 2k) \\ &= 3\sum_{k=0}^{5} k^3 - 2\sum_{k=0}^{5} k \\ &= 3\left(\frac{6\times 5}{2}\right)^2 - 2\,\frac{6\times 5}{2} \\ &= 3\ (15)^2 - 2\times 15 \ = \ 3 \times 225 - 30 \\ &= 675 - 30 \ = \ 645\end{aligned}$$

III. Sommes doubles

III.1. Sommes de tous les éléments d'un tableau rectangulaire

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On considère des complexes $u_{i,j}$ avec $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$. On range ces valeurs dans un tableau rectangulaire.

$$\begin{array}{cccccc} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,j} & \cdots & u_{1,p} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \cdots & u_{2,j} & \cdots & u_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{i,1} & u_{i,2} & \cdots & u_{i,j} & \cdots & u_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \cdots & u_{n,j} & \cdots & u_{n,p} \end{array}$$

On souhaite calculer la somme S de tous ces termes.

III.1.a) Sommation suivant les lignes

On calcule la somme des termes de la $1^{\text{ère}}$ ligne, puis on ajoute la somme des termes de la $2^{\text{ème}}$ ligne, ..., et enfin la somme des termes de la $n^{\text{ème}}$ ligne.

On a alors : $\displaystyle S = \sum_{j=1}^{p} u_{1,j} + \sum_{j=1}^{p} u_{2,j} + \cdots + \sum_{j=1}^{p} u_{n,j}$

ce qui s'écrit encore : $\displaystyle S = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} u_{i,j}\right)$

III.1.b) Sommation suivant les colonnes

On calcule la somme des termes de la $1^{\text{ère}}$ colonne, puis on ajoute la somme des termes de la $2^{\text{ème}}$, ..., et enfin la somme des termes de la $p^{\text{ème}}$ colonne.

On a alors : $\displaystyle S = \sum_{i=1}^{n} u_{i,1} + \sum_{i=1}^{n} u_{i,2} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} u_{i,p}$

ce qui s'écrit encore : $\displaystyle S = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}\right)$

III.1.c) Formule d'interversion des sommes finies

Bien entendu, nous calculons la même somme avec ces deux méthodes, d'où la **formule d'interversion des sommes finies**.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}\right)}$$

- On peut aussi noter ces sommes sous forme compacte.

$$\boxed{\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n,\\ 1 \leqslant j \leqslant p}} u_{i,j} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} u_{i,j}\right) \;=\; \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}\right)}$$

- Si $n = p$, on pourra utiliser la notation suivante :

$$\boxed{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} u_{i,j} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} u_{i,j}\right) \;=\; \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}\right)}$$

Nombre de termes sommés
Il y a deux manières de calculer le nombre de termes sommés.

1) Il y en a $n \times p$ puisqu'on somme tous les éléments d'un tableau comportant n lignes et p colonnes.

2) On peut noter que chaque terme $u_{i,j}$ compte pour un élément sommé. Le nombre de termes est donc donné par la somme double :

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n,\\ 1 \leqslant j \leqslant p}} 1 \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} 1\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} p \;=\; n \times p$$

Exercice 6
Calculer la somme double suivante : $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n,\\ 1 \leqslant j \leqslant p}} i$.

Démonstration.

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n,\\ 1 \leqslant j \leqslant p}} i \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} p \times i \;=\; p \sum_{i=1}^{n} i \;=\; p\,\frac{n(n+1)}{2}$$ □

À retenir
Ce premier exemple simple permet d'illustrer la « technique » de calcul des sommes doubles :

1) On écrit la somme double à l'aide de la formule de sommation suivant les lignes (ou les colonnes).
(ce choix pourra modifier la complexité des calculs)

2) Le calcul de somme double se résume alors à un calcul de sommes simples.

Exercice 7
Soient $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n,\\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_i b_j \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{p} b_i\right)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n,\\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_i \times b_j \;&=\; \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_i \times b_j\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right)\\ &=\; \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) \sum_{i=1}^{n} a_i\end{aligned}$$

La dernière égalité est vérifiée car la quantité $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} b_j$ est indépendante de l'indice de sommation i. □

III.2. Sommes doubles à indices dépendants

III.2.a) Sommation des termes du triangle supérieur

Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons maintenant un tableau carré ($n = p$) et calculons la somme des termes se trouvant au-dessus de la diagonale.

$$\begin{array}{ccccccccc}
u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,i} & \cdots & u_{1,j} & \cdots & u_{1,n} \\
u_{2,1} & u_{2,2} & \cdots & u_{2,i} & \cdots & u_{2,j} & \cdots & u_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
u_{i,1} & u_{i,2} & \cdots & u_{i,i} & \cdots & u_{i,j} & \cdots & u_{i,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
u_{j,1} & u_{j,2} & \cdots & u_{j,i} & \cdots & u_{j,j} & \cdots & u_{j,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
u_{n,1} & u_{n,2} & \cdots & u_{n,i} & \cdots & u_{n,j} & \cdots & u_{n,n}
\end{array}$$

- En sommant suivant les lignes, on obtient :

$$T \;=\; \sum_{j=1}^{n} u_{1j} + \sum_{j=2}^{n} u_{2j} + \ldots + \sum_{j=n}^{n} u_{nj} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} u_{i,j} \right)$$

- En sommant suivant les colonnes, on obtient :

$$T \;=\; \sum_{i=1}^{1} u_{i1} + \sum_{i=1}^{2} u_{i2} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} u_{in} \;=\; \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} u_{i,j} \right)$$

Ces deux sommes étant égales, on obtient la formule :

$$\boxed{\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} u_{i,j} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} u_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} u_{i,j} \right)}$$

Comment retenir cette formule ?

On peut retenir cette formule en considérant l'encadrement $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.
Si on souhaite obtenir la formule de sommation suivant les lignes (*i.e.* commencer par une somme sur i), on peut procéder comme suit.

- On supprime la variable j de l'encadrement : $1 \leqslant i \leqslant \cdot \leqslant n$
  On doit donc considérer une somme : $\sum\limits_{i=1}^{n}$
- On considère alors l'encadrement immédiat de j : $i \leqslant j \leqslant n$
  On doit donc considérer une somme : $\sum\limits_{j=i}^{n}$

On retrouve alors la formule : $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} u_{i,j} \;=\; \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=i}^{n} u_{i,j} \right)$

(on procède de même pour la formule de sommation suivant les colonnes)

Nombre de termes sommés

Il y a deux manières de calculer le nombre de termes sommés.

1) Il y a n^2 termes dans le tableau carré et n termes sur la diagonale.
Il y a donc $n^2 - n$ termes hors diagonale.
Ainsi, il y a $\frac{n^2-n}{2}$ termes dans le triangle supérieur strict.
Et donc $\frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ termes dans le triangle supérieur.

2) On peut noter que chaque terme $u_{i,j}$ compte pour un élément sommé. Le nombre de termes est donc donné par la somme double :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 1 \;=\; \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} 1 \right) \;=\; \sum_{j=1}^{n} j \;=\; \frac{n(n+1)}{2}$$

III.2.b) Sommation des termes du triangle supérieur strict

Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule maintenant uniquement les termes du triangle supérieur strict.

$$\begin{array}{ccccccccc}
u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & u_{1,j} & \cdots & \cdots & u_{1,n} \\
u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & \cdots & u_{2,j} & \cdots & \cdots & u_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\
u_{i,1} & u_{i,2} & \cdots & u_{i,i} & u_{i,i+1} & \cdots & \cdots & \cdots & u_{i,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
u_{j,1} & u_{j,2} & \cdots & u_{j,i} & \cdots & u_{j,j} & u_{j,j+1} & \cdots & u_{j,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & u_{n-1,n} \\
u_{n,1} & u_{n,2} & \cdots & u_{n,i} & \cdots & u_{n,j} & \cdots & \cdots & u_{n,n}
\end{array}$$

- En sommant suivant les lignes, on obtient :

$$U \ = \ \sum_{j=2}^{n} u_{1j} + \sum_{j=3}^{n} u_{2j} + \ldots + \sum_{j=n}^{n} u_{n-1,j} \ = \ \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j} \right)$$

- En sommant suivant les colonnes, on obtient :

$$U \ = \ \sum_{i=1}^{1} u_{i2} + \sum_{i=1}^{2} u_{i3} + \ldots + \sum_{i=1}^{n-1} u_{in} \ = \ \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j} \right)$$

Ces deux sommes étant égales, on obtient la formule :

$$\boxed{\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} u_{i,j} \ = \ \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j} \right) = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j} \right)}$$

Comment retenir cette formule ?

Comme précédemment, on considère l'encadrement $1 \leqslant i < j \leqslant n$.
Pour obtenir la formule de sommation suivant les lignes :

- On supprime la variable j de l'encadrement : $1 \leqslant i < \cdot \leqslant n$
  On doit donc considérer une somme : $\sum\limits_{i=1}^{n-1}$
- On considère alors l'encadrement immédiat de j : $i < j \leqslant n$
  On doit donc considérer une somme : $\sum\limits_{j=i+1}^{n}$

On retrouve alors la formule : $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} u_{i,j} \ = \ \sum\limits_{i=1}^{n-1} \left(\sum\limits_{j=i+1}^{n} u_{i,j} \right)$

(on procède de même pour la formule de sommation suivant les colonnes)

Nombre de termes sommés

Il y a deux manières de calculer le nombre de termes sommés.

1) On a déjà vu qu'il y a $\frac{n^2-n}{2}$ termes dans le triangle supérieur strict.

2) On peut noter que chaque terme $u_{i,j}$ compte pour un élément sommé. Le nombre de termes est donc donné par la somme double :

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 1 \ = \ \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} 1 \right) \ = \ \sum_{j=2}^{n} (j-1) \ = \ \sum_{j=1}^{n-1} j \ = \ \frac{(n-1)n}{2}$$

Exercice 8

Soit $(a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.
Montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$$

IV. Produits finis

IV.1. Définition

Notation Symbole $\prod$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Le produit fini des éléments $u_1, u_2, \dots, u_n$ est noté comme suit.

$$\prod_{i=1}^{n} u_i \;=\; u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$$

Remarque
On utilisera, sans distinction, l'une ou l'autre des notations suivantes :

$$\boxed{\prod_{i=m}^{n} u_i \;=\; \prod_{i \in [\![m,n]\!]} u_i \;=\; \prod_{m \leqslant i \leqslant n} u_i}$$

On a notamment, si $m > n$: $\displaystyle\prod_{i=m}^{n} u_i \;=\; \prod_{i \in \varnothing} u_i \;=\; 1$

et si $m = n$: $\displaystyle\prod_{i=m}^{m} u_i \;=\; u_m$

On réalise l'étude des produits finis par analogie avec celle des sommes finies.

IV.2. Règles de calcul

Proposition 2.

1) **Produit fini d'une constante**
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $m \leqslant n$.

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} a \;=\; a^n} \qquad \boxed{\prod_{i=m}^{n} a \;=\; a^{n-m+1}}$$

- *Ces formules sont valables pour tout élément a* **indépendant de l'indice de multiplication** *i.*

2) **Produit par paquets**
Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $m \leqslant n$.

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} u_i \;=\; \prod_{i=1}^{m} u_i \times \prod_{i=m+1}^{n} u_i}$$

3) **Comportement de $\prod$ vis à vis de λu_i et $u_i \times v_i$**
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $m \leqslant n$.

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} \lambda u_i \;=\; \lambda u_1 \times \lambda u_2 \times \cdots \times \lambda u_n = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} u_i}$$

$$\boxed{\prod_{j=1}^{n} (u_j \times v_j) \;=\; \prod_{j=1}^{n} u_j \times \prod_{j=1}^{n} v_j} \quad \textit{et} \quad \boxed{\prod_{j=1}^{n} \frac{u_j}{v_j} \;=\; \frac{\prod_{j=1}^{n} u_j}{\prod_{j=1}^{n} v_j}}$$

- *La première formule est valable pour tout élément λ* **indépendant de l'indice de multiplication** *i.*

4) **Changements d'indices**

Décalage d'indice : $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \prod_{j=0}^{n} u_j \;=\; \prod_{k=1}^{n+1} u_{k-1} \;=\; \prod_{\ell=2}^{n+2} u_{\ell-2}}$$

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.
$$\boxed{\begin{aligned} \prod_{j=m}^{n} u_j \;&=\; \prod_{k=0}^{n-m} u_{k+m} \quad \textit{en posant } k = j - m \\ &=\; \prod_{i=m+\ell}^{n+\ell} u_{i-\ell} \quad \textit{en posant } i = j + \ell \end{aligned}}$$

Multiplier dans l'autre sens : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\prod_{j=0}^{n} u_j \;=\; \prod_{i=0}^{n} u_{n-i}}$$

On peut écrire une formule similaire pour les sommes commençant à l'indice 1

$$\boxed{\prod_{j=1}^{n} u_j \;=\; \prod_{i=0}^{n-1} u_{n-i}}$$

***5)* Produits télescopiques**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe dont aucun des termes n'est nul. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} \;=\; \frac{u_{n+1}}{u_1}} \quad \text{et} \quad \boxed{\prod_{k=m}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} \;=\; \frac{u_{n+1}}{u_m}}$$

***6)* Produit sur une union d'ensembles**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe dont aucun des termes n'est nul.
Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$.

$$\boxed{\prod_{i\in A\cup B} u_i = \frac{\prod\limits_{i\in A} u_i \times \prod\limits_{i\in B} u_i}{\prod\limits_{i\in A\cap B} u_i}}$$

Remarque

Ces formules s'obtiennent traduction des formules sur les sommes suivant le dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{ccc} \sum & \longleftrightarrow & \prod \\ + & \longleftrightarrow & \times \\ - & \longleftrightarrow & / \end{array}$$

Via ce dictionnaire, nous avons donc affaire aux mêmes formules.

IV.3. Fonction factorielle

Définition

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on nomme **factorielle** n et on note $n!$ la quantité :

$$n! \;=\; \prod_{k=1}^{n} k \;=\; n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

- Par convention, on note : $0! = 1$.
  (correspond à l'écriture : $0! = \prod\limits_{k=1}^{0} k = \prod\limits_{k\in[\![1,0]\!]} k = \prod\limits_{k\in\varnothing} k = 1$, la quantité 1 étant l'élément neutre pour le produit)

Proposition 3. *(immédiate)*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\; (n+1)! \;=\; (n+1) \times n!}$$