CH XVIII : Espaces probabilisés sur un univers fini

I. Avant-propos : ensemble au plus dénombrable

I.1. Définition

Définition

Soit E un ensemble.

- On dit que l'ensemble E est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E est en bijection avec $[\![1,n]\!]$. Autrement dit, E est fini s'il existe une fonction $\psi : E \to [\![1,n]\!]$ qui réalise une bijection entre E et $[\![1,n]\!]$. Une telle fonction ψ attribue un numéro (entre 1 et n) à chaque élément de E.
- On dit que l'ensemble E est (infini) dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Autrement dit, E est fini s'il existe une fonction $\psi : E \to \mathbb{N}$ qui réalise une bijection entre E et $\mathbb{N}$. Une telle fonction ψ attribue un numéro entier à chaque élément de E.
- On dit que l'ensemble E est au plus dénombrable s'il est fini ou s'il est dénombrable.

Remarque

- S'il existe une bijection $\psi : E \to F$ entre deux ensembles E et F, ces ensembles sont dits équipotents.
- On peut alors réécrire la définition précédente :
  - × un ensemble fini est un ensemble équipotent à $[\![1,n]\!]$.
  - × un ensemble dénombrable est un ensemble équipotent à $\mathbb{N}$.
  - × un ensemble au plus dénombrable s'il est équipotent à $[\![1,n]\!]$ (pour un n donné) ou s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.
- Si E est un ensemble au plus dénombrable, E admet une fonction de numérotation ψ. Cette fonction qui attribue un numéro à chacun des éléments de E peut permettre d'indicer les éléments de E. Ainsi, tout ensemble au plus dénombrable E peut s'écrire sous la forme :

$$E \ = \ \{x_i \mid i \in I\} \quad \text{où} \quad I \subset \mathbb{N}$$

De même, une famille $\mathcal{F}$ au plus dénombrable d'objets pourra s'écrire :

$$\mathcal{F} \ = \ (u_i)_{i \in I} \quad \text{où} \quad I \subset \mathbb{N}$$

I.2. Exemples d'ensembles dénombrables

Exemple

- L'ensemble $E = \{3, \sqrt{\mathrm{e}}, -12\}$ est un ensemble fini puisque la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \psi & : & E & \to & [\![1,3]\!] \\ & & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si\ x = 3 \\ 2 & si\ x = \sqrt{e} \\ 3 & si\ x = -12 \end{array} \right. \end{array}$$

est une bijection.
- L'ensemble $\mathbb{N}$ est (évidemment) dénombrable puisque la fonction :

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & & n & \mapsto & n \end{array}$$

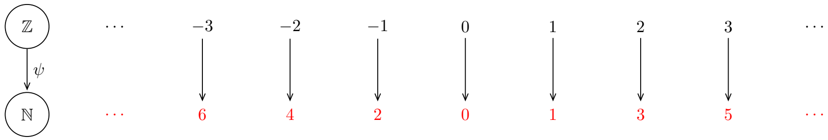
est une bijection. Il est simple de démontrer que l'ensemble $2\,\mathbb{N}$ des nombres pairs est dénombrable. On peut proposer la fonction de numérotation suivante :

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & 2\,\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & & m & \mapsto & \frac{m}{2} \end{array}$$

Ce résultat doit sembler moins naturel. Il signifie qu'il y a exactement autant d'entiers naturels que d'entiers naturels pairs.

- Dans le même ordre d'idée, on peut démontrer que $\mathbb{Z}$ est un ensemble dénombrable : il y a autant d'entiers relatifs que d'entiers naturels !

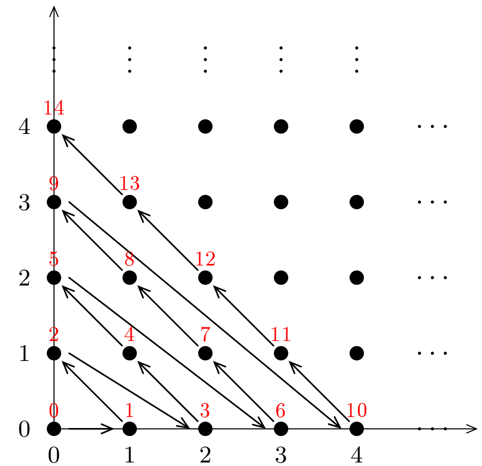
$$\begin{array}{rcl} \psi \ : \ \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 2\,x-1 & si\ x>0 \\ 2\,x & si\ x \leqslant 0 \end{array} \right. \end{array}$$



L'ensemble $\mathbb{Z}$ peut être vu comme deux copies de $\mathbb{N}$ (une copie est nécessaire pour les nombres entiers positifs et l'autre pour les nombres entiers strictement négatifs). En démontrant que ψ est une bijection, on démontre qu'il y a le même nombre d'éléments dans $\mathbb{N}$ que dans deux copies de $\mathbb{N}$.

- On peut aussi démontrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.
La fonction de numérotation est la suivante :

$$\begin{array}{rcl} \psi \ : \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (i, j) & \mapsto & \dfrac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j \end{array}$$



Il faut comprendre que chaque ligne du plan (celle d'ordonnée $j=0$, celle d'ordonnée $j=2$, celle d'ordonnée $j=3$, ...) est une copie de $\mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ contient donc une infinité dénombrable de copies de $\mathbb{N}$. En démontrant que ψ est une bijection, on démontre qu'il y a le même nombre d'éléments dans $\mathbb{N}$ que dans une infinité dénombrable de copies de $\mathbb{N}$! C'est là encore une propriété qui ne semble pas très naturelle.

- On peut généraliser la propriété précédente :
  - × pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{N}^r$ est dénombrable.
  - × pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout ensemble dénombrable E, l'ensemble E^r est dénombrable.
- On peut aussi démontrer que $\mathbb{Q}$ est un ensemble dénombrable. Rappelons qu'un nombre rationnel s'écrit sous la forme $\dfrac{m}{n}$ où $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Dès lors, le caractère dénombrable de $\mathbb{Q}$ ne doit pas paraître trop étonnant puisque $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ l'est lui-même.

Remarque

- On l'a vu : un ensemble est dénombrable si on peut numéroter ses éléments par des entiers naturels.
- Pour bien comprendre cette notion, on peut penser à une l'organisation d'une course. Avant le départ de celle-ci, on doit attribuer des dossards à chaque participant. Imaginons que l'ensemble des couples d'entiers ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) se présente à une course. Chaque couple se verra alors attribuer un numéro de dossard en un temps fini. Attention : cela ne veut pas dire qu'il suffit d'un temps fini pour attribuer `TOUS` les dossards. En effet, il faut un temps infini pour attribuer cette infinité de dossards. Mais chaque couple a l'assurance que son tour viendra en un temps fini. Typiquement, le couple $(0,4)$ se voit attribuer le numéro 14, il devra pour cela attendre que les 14 premiers numéros (du 0 au 13) aient été attribués.

I.3. Il existe des ensembles non dénombrables

I.3.a) L'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable

Théorème 1.
L'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ (ensemble des parties de $\mathbb{N}$) n'est pas dénombrable.

Démonstration.

- Il s'agit de démontrer qu'il n'existe pas d'application bijective entre $\mathbb{N}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Pour ce faire, on va démontrer qu'il n'existe pas d'application surjective de $\mathbb{N}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. On procède par l'absurde.
- Supposons qu'il existe une application $\psi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ surjective. Alors :
  1) Comme ψ est une application, ψ associe à tout entier $m \in \mathbb{N}$ un élément de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Autrement dit, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\psi(m)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.
  2) Comme ψ est surjective alors tout ensemble de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ admet un antécédent par ψ. Autrement dit, la propriété suivante est vérifiée :

  $$\forall F \in \mathscr{P}(\mathbb{N}),\ \exists m \in \mathbb{N},\ F = \psi(m)$$

  Considérons alors l'ensemble :

  $$D \ = \ \{m \in \mathbb{N} \mid m \notin \psi(m)\}$$

  Comme $D \subset \mathbb{N}$, alors D admet un antécédent par ψ. Autrement dit, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $D = \psi(p)$. Deux cas se présentent alors.

  × Si $p \in D$ alors, par propriété de définition de D, $p \notin \psi(p)$.
  Ainsi : $p \notin D$ ce qui contredit l'hypothèse.

  × Si $p \notin D$ alors $p \notin \psi(p)$.
  Par définition de D, cela implique : $p \in D$ ce qui contredit l'hypothèse.

  Les deux cas aboutissent à une contradiction, ce qui démontre qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.
- Ainsi, il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. □

Remarque

- On démontre qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. En revanche, il est simple de trouver une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathscr{P}(N)$. Il suffit par exemple de considérer l'application suivante :

  $$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{N} & \to & \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ & & m & \mapsto & \{m\} \end{array}$$

  L'application φ est injective ($\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \varphi(m) = \varphi(n) \ \Rightarrow\ m = n$).
- En démontrant qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, on démontre que l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ est strictement plus grand que l'ensemble $\mathbb{N}$: quel que soit l'application $g : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, il y a forcément des éléments de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ qui ne sont pas atteints par g.
- Ce dernier point signifie qu'il existe un infini qui contient plus d'éléments que n'en contient $\mathbb{N}$. Autrement dit, il existe un infini plus grand que l'infini dénombrable. En particulier, l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ est un exemple d'infini qui contient strictement plus d'éléments que $\mathbb{N}$.
- Dans la démonstration, on ne se sert pas d'une quelconque propriété de $\mathbb{N}$. Si on considère un ensemble E qui contient une infinité d'éléments, on peut démontrer de la même façon que $\mathscr{P}(E)$ en contient strictement plus. Dans ce cas, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ contient strictement plus d'éléments que $\mathscr{P}(E)$ (on applique la propriété précédente à $F = \mathscr{P}(E)$). En agissant ainsi de suite, on est capable de démontrer que quel que soit l'infini considéré, il existe un infini strictement plus grand. La discussion d'enfants :
  - « Moi j'en ai une infinité ! »
  - « Bah moi j'en ai une infinité mais une infinité plus grande ! »
  - « Bah moi j'en ai une infinité encore plus grande ! »
  - ...

  est totalement fondée mathématiquement et l'un comme l'autre pourront arguer posséder une infinité strictement plus grande que celle qui vient d'être évoquée.

I.3.b) L'ensemble $[0,1[$ n'est pas dénombrable

Théorème 2.
L'ensemble $[0,1[$ *n'est pas dénombrable.*

Démonstration.
Faite en cours (argument diagonal). □

I.3.c) L'hypothèse du continu

Théorème 3.

- *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *est équipotent à* $[0,1[$.
  (il y a autant de réels que de réels dans $[0,1[$*)*
- *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *est équipotent à* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
  (il y a autant de réels que de suites dont les termes sont dans $\{0,1\}$*)*
- *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *est équipotent à* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
  (il y a autant de réels que de suites d'entiers)
- *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *est équipotent à* $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.
  (il y a autant de réels que de parties de $\mathbb{N}$*)*

Remarque

- On a vu qu'il existait plusieurs tailles d'infinis. En particulier :
  - × $\mathbb{N}$ est un ensemble infini dénombrable.
  - × $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ est un ensemble infini de cardinal strictement plus grand que $\mathbb{N}$.

  Il est alors assez naturel de se poser la question de savoir s'il existe un infini de taille intermédiaire. **L'hypothèse du continu** affirme qu'il n'existe pas d'ensemble E qui serait à la fois :
  - × de cardinal strictement plus grand que $\mathbb{N}$,
  - × de cardinal stricement plus petit que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.
- Cette hypothèse permet alors de classifier les infinis :
  - × on note $\aleph_0$ le cardinal de tout ensemble dénombrable.
    En particulier, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^r$ (pour $r \in \mathbb{N}^*$) sont de cardinal $\aleph_0$.
  - × on note $\aleph_1$ le cardinal de tout ensemble $\mathscr{P}(E)$ où E est un ensemble dénombrable. On peut alors noter, en accord avec la définition : $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.
    En particulier, $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{R}$, $[0,1[$ sont de cardinal $\aleph_1$.
  - × on note $\aleph_2$ le cardinal de tout ensemble $\mathscr{P}(E)$ où E est un ensemble de cardinal $\aleph_1$. En accord avec la définition : $\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$.
    En particulier, $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ est de cardinal $\aleph_2$.
  - × ...
  - × on note $\aleph_{i+1}$ ($i \in \mathbb{N}$) le cardinal de tout ensemble $\mathscr{P}(E)$ où E est un ensemble de cardinal $\aleph_i$. On peut alors noter, en accord avec la définition : $\aleph_{i+1} = 2^{\aleph_i}$.
  - × ...

II. Espaces probabilisables - cas fini

II.1. Notions d'espace probabilisable

II.1.a) Définition

Définition
On appelle **espace probabilisable**, sur un univers fini, la donnée d'un couple $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega)\big)$ où :

- Ω est un ensemble appelé **univers** (ou univers des possibles).
  C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- $\mathscr{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω.

Vocabulaire

- Les éléments de $\mathscr{A}$ sont alors appelés des **événements**.
- L'événement $\varnothing$ (*c'est un élément de* $\mathscr{A}$) est l'**événement impossible**.
- L'événement Ω est l'**événement certain**.
- L'événement $\bar{A}$ est appelé **événement contraire** de A.

Exemples

- *Séquence de Pile ou Face.*
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à jeter n fois une pièce. On utilise la notation P pour Pile et F pour *Face*.
  × L'univers des possibles est : $\Omega = \{P, F\}^n$.
  × Si $n = 3$, le 3-tirage $\omega = (P, P, F)$ est la réalisation de l'expérience où les deux premiers lancers donnent Pile et le dernier lancer donne Face.
- *Répartition de n boules discernables dans p urnes discernables*
  Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On considère l'expérience qui consiste à répartir de manière aléatoire n boules discernables dans p urnes discernables. On choisit de numéroter les boules de 1 à n et les urnes de 1 à p.
  × L'univers des possibles est : $\Omega = [\![1, p]\!]^n$.
  × Le n-tirage $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ est la réalisation de l'expérience où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la boule numéro i a été placé dans l'urne ω_i.
- *Répartition de n boules indiscernables dans p urnes discernables*
  Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On considère l'expérience qui consiste à répartir de manière aléatoire n boules indiscernables dans p urnes discernables. Une réalisation de cette expérience est alors caractérisée par le nombre de boules x_1, …, x_p que contient chaque urne.
  × L'univers des possibles est : $\Omega = \big\{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p \mid x_1 + \dots + x_p = n\big\}$.
  × Le p-tirage $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_p)$ est la réalisation de l'expérience où, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, l'urne j contient ω_j boules.

Remarque
La notion d'événements ne requiert pas la définition d'application probabilité. Un événement n'est pas un objet aléatoire même s'il sera utilisé dans un contexte aléatoire.

II.1.b) Expériences aléatoires et vocabulaire sur les événements

Exemple d'espaces probabilisables

- Si $\Omega \neq \varnothing$, $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu, appelée tribu grossière.
  Cette tribu contient seulement deux événements : l'événement impossible et l'événement certain.
- Si $\Omega \neq \varnothing$, $A \subset \Omega$, $A \neq \varnothing$ et $A \neq \Omega$, alors $\{\varnothing, \Omega, A, \bar{A}\}$ est une tribu sur Ω. C'est la plus petite tribu qui contient A.

Exemple

1) Expérience : on effectue 1 lancer d'une pièce.
- Univers : $\Omega = \{P, F\}$.
  Univers : l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.
- $\mathscr{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\}$.

2) Expérience : on effectue 1 lancer d'un dé 6.
- Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  Univers : l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.
  Espace probabilisable : $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega)\big)$ *($\mathscr{P}(\Omega)$ est ici l'ensemble de tous les événements).*

- Exemple d'événement A : « le résultat est pair ».
Un événement apparaît donc sous la forme d'une proposition définie sur l'expérience. En réalité, rigoureusement, un événement c'est l'ensemble des tirages qui réalisent cette proposition.
Ici : $A = \{2, 4, 6\} \in \mathscr{P}(\Omega)$
Un événement est un élément de la tribu.
- Notons ω le résultat de l'expérience.
On dira que l'événement A est réalisé si le résultat de l'expérience vérifie l'événement. Autrement dit : A est réalisé par ω si $\omega \in A$.
Le lancer $\omega = 4$ réalise l'événement $A = \{2, 4, 6\}$.

3) Expérience : soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois un dé 6.

- Univers : $\Omega = [\![1, 6]\!]^n$, ensemble des n-uplets à valeur dans $[\![1, 6]\!]$.
(les éléments de Ω seront appelés des n-lancers)
- Considérons l'événement F_i : « on obtient 6 au $i^{\text{ème}}$ lancer ».
L'ensemble $F_i \subset [\![1, 6]\!]^n$ est un ensemble de n-uplets : il est constitué de tous les n-uplets dont le $i^{\text{ème}}$ élément est 6.
Un n-lancer ω qui réalise F_i est un n-lancer dont le $i^{\text{ème}}$ coefficient est un 6. Autrement dit ω est de la forme :
$$\omega = (\underbrace{\star, \star, \ldots, \star,}_{i-1 \text{ premiers coefficients}} 6, \star, \ldots, \star)$$
où chaque $\star$ désigne un entier de $[\![1, 6]\!]$.
- Notons G l'événement :

G : « on obtient (au moins une fois) 6 lors des 10 premiers lancers ».

Il s'écrit $G = \bigcup_{i=1}^{10} F_i$.
Cet événement est réalisé si 6 est obtenu soit lors du 1^{er} lancer, soit lors du $2^{\text{ème}}$, ..., soit lors du $10^{\text{ème}}$ lancer.
Un n-lancer ω réalisant G est un n-lancer (c'est-à-dire une suite dont les termes sont dans $[\![1, 6]\!]$) dont l'un (au moins) des 10 premiers coefficients est un 6.

- Considérons H : « on obtient 6 (au moins une fois) lors de la partie ».
Cet événement s'écrit $H = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$.
Cet événement est réalisé si 6 est obtenu lors du 1^{er} lancer, ou lors du $2^{\text{ème}}$, ou lors du $3^{\text{ème}}$ lancer ..., ou lors du $n^{\text{ème}}$ lancer
Un n-lancer ω réalisant H est un n-lancer dont l'un (au moins) des lancers est un 6.
- De même, on peut considérer l'événement : $S = \bigcap_{i=1}^{4} F_i$
Cet événement est constitué de l'ensemble des n-uplets dont les 4 premiers éléments sont 6.
Un n-lancer ω qui réalise S est un n-lancer dont les quatre premiers lancers sont des 6. Autrement dit ω est de la forme :
$$\omega = (\underbrace{6, 6, 6, 6,}_{4 \text{ premiers coefficients}} \star, \star, \ldots, \star)$$
- On considère enfin l'événement : $T = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$.
Cet événement est constitué de l'ensemble des n-uplets dont les tous éléments sont 6 : c'est donc l'ensemble qui ne contient que le n-uplet dont tous les éléments valent 6.
Le seul n-lancer ω réalisant T est : $\omega = (6, 6, 6, \ldots, 6, \ldots, 6)$.

II.1.c) Réunion finie d'événements

Définition

Soit Ω un ensemble fini.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit I une partie de $[\![1, n]\!]$ ($I \subset [\![1, n]\!]$).

Notons $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$ ($\forall i \in I,\ A_i \in \mathscr{P}(\Omega)$).

a) Alors $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathscr{P}(\Omega)$ (c'est un événement) est défini par :

$$\boxed{\bigcup_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in I,\ \omega \in A_i\}}$$

L'événement $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ est réalisé si l'un des événements A_i est réalisé.

Ce qui s'écrit : $\omega \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in I,\ \omega \in A_i$.

b) Alors $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \in \mathscr{P}(\Omega)$ (c'est un événement) est défini par :

$$\boxed{\bigcap_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in I,\ \omega \in A_i\}}$$

L'événement $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ est réalisé si tous les événements A_i est réalisé.

Autrement dit : $\omega \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in I,\ \omega \in A_i$.

On déduit de ces définitions les notations utilisées dans l'exemple.

- Lorsque $I = [\![1, n]\!]$, ces événements sont notés : $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ et $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

II.2. Propriétés de $\mathscr{P}(\Omega)$

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\varnothing \in \mathscr{P}(\Omega)$.

2) Pour tout $(A, B) \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^2$:

$$\boxed{A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \text{ sont des éléments de } \mathscr{P}(\Omega).}$$

3) Si $I \subset [\![1, n]\!]$ et si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$:

$$\boxed{\bigcup_{i \in I} A_i \ \text{ et } \ \bigcap_{i \in I} A_i \ \text{ sont des éléments de } \mathscr{P}(\Omega).}$$

Résumé des propriétés de stabilité.

L'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$:

× contient l'événement impossible $\varnothing$ et l'événément certain Ω,

× est stable par union finie (on verra l'an prochain qu'il est même stable par union dénombrable),

× est stable par intersection finie (on verra l'an prochain qu'il est même stable par intersection dénombrable),

× est stable par passage au complémentaire.

Ainsi, on pourra toujours considérer l'événément obtenu par une union au plus dénombrable d'événements de $\mathscr{P}(\Omega)$, par une intersection au plus dénombrable d'événements de $\mathscr{P}(\Omega)$, ou encore comme complémentaire d'un événement de $\mathscr{P}(\Omega)$. Tous ces événements sont dans $\mathscr{P}(\Omega)$.

II.3. Système complet d'événements

Définition *(Événements incompatibles)*

Soit $(A, B) \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^2$ un couple d'événements.

Les événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

> Il ne faut pas confondre la notion d'incompatibilité de deux événements avec la notion d'indépendance de deux événements.
>
> - La notion d'incompatibilité est intrinsèque aux événements.
> - La notion d'indépendance dépend fortement de la probabilité $\mathbb{P}$ choisie. En toute rigueur, on devrait parler d'indépendance de deux événements pour la probabilité $\mathbb{P}$ (*cf* plus loin).

Définition *(Système complet d'événements)*

Soit $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega)\big)$ un espace probabilisable fini.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $I \subset [\![1, n]\!]$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements de $\mathscr{P}(\Omega)$.

La famille $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'événements** si :

(i) $\Omega = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$

(ii) Pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$
(les événements sont deux à deux incompatibles)

Exemple

Soit $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega)\big)$ un espace probabilisable et soit A un événement.
La famille $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements.

Remarque

- Si on sait de plus : $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$, on obtient une partition de Ω.
  On peut faire l'analogie avec un puzzle. Les événements A_i sont les pièces.
  1) Deux pièces ne se chevauchent jamais.
  2) Toutes les pièces mises côte à côte permettent de reconstituer le dessin qui n'est autre que Ω.
- On peut aussi relier la notion de système complet d'événements à celle de raisonnement par disjonction de cas (*resp.* faire le parallèle avec les structures conditionnelles).
  1) Le caractère disjoint des cas étudiés : deux cas ne peuvent être vrais en même temps.
  (*resp.* à l'aide de l'instruction `elif`, le 2$^{\text{ème}}$ branchement n'est considéré que si la condition de la 1$^{\text{ère}}$ branche n'est pas vérifiée et ainsi de suite)
  2) Le caractère exhaustif de la recherche : si on regroupe tous les cas étudiés, on obtient tous les cas possibles.
  (*resp.* on utilise l'instruction `else` (sans condition) dans la dernière branche ce qui assure qu'au moins un des blocs est exécuté)

III. Espace probabilisé

III.1. Probabilité

III.1.a) Définition

Définition

Soit $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega)\big)$ un espace probabilisable fini.

- Une probabilité est une application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :
  1) $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\boxed{0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1}$
  2) $\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$
  (la probabilité de l'événement certain est 1*)*
  3) Pour tout couple $(A, B) \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^2$ d'événements incompatibles $(A \cap B = \varnothing)$:
  $$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) \ = \ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}$$
  (cette propriété est appelée additivité)
- Lorsqu'une telle application existe, le triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**.

Remarque

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La propriété d'additivité peut se noter de manière générale comme suit.
  Soit $I \subseteq [\![1, n]\!]$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles. Alors :
  $$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)}$$
- En particulier, lorsque $I = [\![1, m]\!]$, si $(A_1, \dots, A_m)$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles alors :
  $$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)}$$

III.1.b) Vocabulaire associé

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

- Un événement A est dit **négligeable** ou **quasi-impossible** si : $\mathbb{P}(A) = 0$.
- Un événement A est dit **quasi certain** si : $\mathbb{P}(A) = 1$.
- Si $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ vérifie la propriété } \mathcal{P}\}$ et $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que la propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée **presque sûrement**.

Remarque

Avec cette définition, les propriétés suivantes sont vérifiées.

- L'événement impossible $\varnothing$ est négligeable (quasi-impossible).
- L'événément certain Ω est quasi-certain.
- Attention ! A quasi certain ($\mathbb{P}(A) = 1$) n'implique pas $A = \Omega$.
- Attention ! A quasi-impossible ($\mathbb{P}(A) = 0$) n'implique pas $A = \varnothing$.

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant en 1 lancer d'un dé à 6 faces. L'univers associé est $\Omega = [\![1, 6]\!]$. On munit l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ de la probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(\{5\}) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{2}$.

- Obtenir un résultat inférieur à 4 est un événement A quasi-impossible.
  $A = \{1, 2, 3, 4\} \neq \varnothing$ et $\mathbb{P}(A) = 0$.
- Obtenir un résultat supérieur ou égal à 5 est un événement B quasi-certain.
  $B = \{5, 6\} \neq \Omega$ et $\mathbb{P}(B) = 1$.

III.2. Propriétés des probabilités

Propriété

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$. En particulier : $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

2) $\forall (A, B) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^2$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

3) $\forall (A, B) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^2$, $A \subset B \ \Rightarrow\ \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
(l'application $\mathbb{P}$ est croissante)

4) $\forall (A, B) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^2$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

5) $\forall (A, B, C) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^3$,

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & & - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}}$$

(formule du crible)

6) $$\boxed{\forall (A_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^n,\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)}$$

Démonstration.

1) On a : $A \cup \overline{A} = \Omega$ (réunion disjointe). Ainsi, par additivité :

$$\mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

2) On a : $(A \setminus B) \ \cup\ (A \cap B) = A$ (réunion disjointe).
Ainsi, par additivité :

$$\mathbb{P}((A \setminus B) \ \cup\ (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$$

3) Supposons $A \subset B$.
D'après le point précédent : $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B)$.
Or, comme $A \subset B$, on a $A \cap B = A$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A)$$

4) On a : $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (la deuxième réunion est disjointe).
On en déduit, à l'aide du point ***2)*** que :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B) & = & \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{array}$$

5) Généralisation de la formule précédente :

$$\begin{array}{rl} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) & \\ = & \mathbb{P}(A \cup (B \cup C)) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & - \left(\ \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C))\ \right) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) \\ & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}$$

6) On démontre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$
où $\mathscr{P}(n)$: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$

$\square$

III.3. Le cas de l'équiprobabilité

Lorsque l'on travaille sur un univers fini, il est fréquent de considérer l'application probabilité pour laquelle toutes les issues ont la même probabilité de se produire.

Théorème 4.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.
Ainsi il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

- *Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires i.e. telle que :*

$$\boxed{\mathbb{P}(\{\omega_1\}) \ = \ \dots \ = \ \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}}$$

- *Cette probabilité est appelée probabilité* **uniforme** *et est définie par :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P} \ : \ \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{\textit{nombre d'issues réalisant } A}{\textit{nombre d'issues de l'expérience}} \end{array}}$$

Démonstration.
Il suffit de vérifier les axiomes des probabilités.
L'additivité provient de l'additivité de l'application Card. □

Si l'univers fini Ω est muni de la probabilité uniforme, les calculs des probabilités se ramènent à des calculs de dénombrement

Exemple

On considère un jeu de 32 cartes.
L'expérience consiste à effectuer un tirage (simultané) de 5 cartes.
L'univers Ω est ici l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes. Autrement dit, Ω contient toutes les mains possibles.
Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = \binom{32}{5}$.
Les tirages étant considérés comme équiprobables, l'univers Ω est muni de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage contenant un carré ?

Démonstration.
On note A l'événement : « le tirage obtenu contient un carré ».

- Un 5-tirage (une main de 5 cartes) réalisant A est entièrement déterminé par :
  - × le choix de la hauteur du carré : 8 possibilités.
  - × le choix de la carte restante : $32 - 4 = 28$ possibilités.
    (la carte restante n'est pas une des 4 cartes du carré)
- On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) \ &= \ \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{8 \times 28}{\frac{32!}{5!\ 27!}} = \frac{8 \times \cancel{28}}{\frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times \cancel{28}}{5!}} \\ &= \ \frac{8 \times 5!}{32 \times 31 \times 30 \times 29} = \frac{\cancel{8} \times 5 \times \cancel{4} \times 3 \times 2}{\cancel{32} \times 31 \times 30 \times 29} \\ &= \ \frac{\cancel{5 \times 3 \times 2}}{31 \times \cancel{30} \times 29} = \frac{1}{31 \times 29} \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité de A est de $\dfrac{1}{899} = 0,0011$. □

2) Et celle d'obtenir un tirage contenant exactement un pique ?

Démonstration.
On note B : « le tirage obtenu contient exactement un pique ».

- Un 5-tirage (une main de 5 cartes) réalisant B est entièrement déterminé par :
  - × le choix de la hauteur du pique : 8 possibilités.
  - × le choix des 4 cartes restantes : $\binom{24}{4}$ possibilités.
    (les 4 cartes restantes ne sont pas des piques)
- Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{8 \times \frac{24!}{4!\ 20!}}{\frac{32!}{5!\ 27!}} = \frac{8 \times \frac{24\times23\times22\times21}{4!}}{\frac{32\times31\times30\times29\times28}{5!}} \\ &= \frac{\cancel{8} \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times \cancel{5!}}{\cancel{32} \times 31 \times \cancel{30} \times 29 \times 28 \times 4!} = \frac{\cancel{24} \times 23 \times 22 \times 21}{31 \times 29 \times 28 \times \cancel{4!}} \\ &= \frac{23 \times 22 \times 21}{31 \times 29 \times 28} = \frac{23 \times 22 \times 3}{31 \times 29 \times 4} = \frac{23 \times 11 \times 3}{31 \times 29 \times 2} \end{aligned}$$

La probabilité de B est donc de $\dfrac{23 \times 11 \times 3}{31 \times 29 \times 2} \simeq 0,42$. □

IV. Probabilité conditionnelle

IV.1. Définition

Théorème 5.
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
On considère l'application $\mathbb{P}_B$ suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_B & : & \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & & B & \mapsto & \boxed{\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}} \end{array}$$

- *$\mathbb{P}_B$ est une probabilité, appelée* **probabilité conditionnelle** *relative à A.*
- *Pour tout événement A, $\mathbb{P}_B(A)$ se lit : probabilité de A sachant (que l'événement) B (est réalisé).*

Démonstration.
Il s'agit de vérifier que $\mathbb{P}_B$ vérifie les axiomes d'une probabilité.

1) Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.
- Comme $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$ (car $\mathbb{P}(B) \neq 0$), on a : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geqslant 0$.
- Comme $A \cap B \subset B$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B)$ et donc : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leqslant 1$.

2) $\mathbb{P}_B(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap \Omega)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.

3) Soit $(A_1, A_2) \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^2$ un couple d'événements incompatibles. Alors :

$$\mathbb{P}_B(A_1 \cap A_2) = \frac{\mathbb{P}\big(B \cap (A_1 \cap A_2)\big)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\big((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)\big)}{\mathbb{P}(B)}$$

Notons alors $C_1 = B \cap A_1$ et $C_2 = B \cap A_2$.
Les événements C_1 et C_2 sont incompatibles. En effet :

$$C_1 \cap C_2 = (B \cap A_1) \cap (B \cap A_2) = B \cap (A_1 \cap A_2) = B \cap \varnothing = \varnothing$$

Par additivité de $\mathbb{P}$, on obtient alors :

$$\mathbb{P}\big((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)\big) \;=\; \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2)$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B(A_1 \cup A_2) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B \cap A_1)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(B \cap A_1)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \mathbb{P}_B(A_1) + \mathbb{P}_B(A_2) \end{aligned}$$

□

Exemple
On considère le résultat d'un dé 6 équilibré.
L'univers est donc $[\![1, 6]\!]$ et est muni de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.
On considère les événements suivants.
A : « on obtient un nombre inférieur ou égal à 3 »
B : « on obtient 5 » et C : « on obtient 2 »
Calculer $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_A(C)$.

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord $\mathbb{P}(B \,|\, A)$.

  Si A est réalisé, c'est qu'on a obtenu un nombre inférieur ou égal à 3 lors du lancer. Dans ce cas, on n'a pas pu obtenir 5 et l'événement B n'est donc pas réalisé. Ainsi : $\mathbb{P}(B \,|\, A) = 0$.

  On peut retrouver ce résultat par calcul :

$$\mathbb{P}(B \,|\, A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}(A)} = 0$$

- Déterminons ensuite $\mathbb{P}(C \,|\, A)$.

  Si A est réalisé, c'est qu'on a obtenu un nombre inférieur ou égal à 3 lors du lancer. C'est le cas si et seulement si le résultat du lancer est un élément de $\{1, 2, 3\}$. Dans ce cas, l'événement C est réalisé si et seulement si le lancer a eu pour résultat 2. Les résultats étant équiprobables, on en déduit $\mathbb{P}(C \,|\, A) = \frac{1}{3}$.

  On peut retrouver ce résultat par calcul :

$$\mathbb{P}(C \,|\, A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

□

L'application $\mathbb{P}_A$ étant une probabilité, elle vérifie l'ensemble des propriétés que nous avons listé au paragraphe III.2. .

Propriété

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

Pour tout événement B et tout événement C, on a :

1) $\mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$ donc $\mathbb{P}_A(\varnothing) = 0$

2) $\mathbb{P}_A(B \setminus C) = \mathbb{P}_A(B \setminus (B \cap C)) = \mathbb{P}_A(B) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$

3) $B \subset C \;\Rightarrow\; \mathbb{P}_A(B) \leqslant \mathbb{P}_A(C)$

4) $\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$

Démonstration.
L'application $\mathbb{P}_A$ est une probabilité.
Elle vérifie donc l'ensemble des propriétés des probabilités. □

IV.2. Formules des probabilités composées

IV.2.a) Énoncé au rang 2

Ce premier résultat stipule que la donnée de $\mathbb{P}_A(B)$ nous enseigne la valeur de $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Théorème 6.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit $(A, B) \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^2$.

1) *Supposons $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Alors :*

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) \ = \ \mathbb{P}(B \,|\, A) \times \mathbb{P}(A)} \ = \ \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$$

2) *Supposons $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors :*

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \,|\, B) \times \mathbb{P}(B)} \ = \ \mathbb{P}(B)\ \mathbb{P}_B(A)$$

3) *On a alors, si $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \neq 0$:* $\boxed{\mathbb{P}(B \,|\, A) \times \mathbb{P}(A) \ = \ \mathbb{P}(A \,|\, B) \times \mathbb{P}(B)}$

Démonstration.
C'est la définition de probabilité conditionnelle ! □

IV.2.b) Énoncé général

Théorème 7. *(Formule des probabilités composées)*

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Soit $(A_1, \dots, A_m)$ une famille finie d'événements de $\mathscr{A}$.

On suppose : $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}) \neq 0$.

On a alors :

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_m) \\ &\qquad = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(A_2 \,|\, A_1)\ \mathbb{P}(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2)\ \ldots\ \mathbb{P}(A_m \,|\, A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1}) \end{aligned}}$$

Démonstration.

- On note tout d'abord que, pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$:
$$B_{m-1} = A_1 \cap \dots \cap A_{m-1} \ \subset \ A_1 \cap \dots \cap A_k = B_k$$
On a donc $\mathbb{P}(B_k) \geqslant \mathbb{P}(B_{m-1}) > 0$ (car $\mathbb{P}(B_{m-1}) \neq 0$) et ainsi $\mathbb{P}(B_k) \neq 0$. On peut donc considérer $\mathbb{P}_{B_k}$ pout tout $k \in [\![1, m-1]\!]$.
- Démontrons par récurrence :
$\forall m \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$, $\mathscr{P}(m)$ où $\mathscr{P}(m)$: toute famille $(A_1, \dots, A_m) \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^m$ telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}) \neq 0$ vérifie :
$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1)\, \mathbb{P}(A_2 \,|\, A_1)\, \mathbb{P}(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2)\ \ldots\ \mathbb{P}(A_m \,|\, A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1})$$
  - **Initialisation** :
  Soit $(A_1, A_2) \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^2$ tel que $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$. Par définition :
  $\mathbb{P}(A_2 \,|\, A_1) = \dfrac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)}$ et donc $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \ = \ \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(A_2 \,|\, A_1)$.
  D'où $\mathscr{P}(2)$.
  - **Hérédité** : soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
  Supposons $\mathscr{P}(m)$ et démontrons $\mathscr{P}(m+1)$.
  Soit $(A_1, \dots, A_{m+1}) \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^{m+1}$ une famille telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m) \neq 0$. Avec les notations précédentes :
  $$A_1 \cap \dots \cap A_m \cap A_{m+1} = B_m \cap A_{m+1}$$
  On en déduit :
  $$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m \cap A_{m+1}) = \mathbb{P}(B_m \cap A_{m+1}) = \mathbb{P}(B_m) \times \mathbb{P}(A_{m+1} \,|\, B_m)$$
  (par application de la propriété au rang 2 sachant que $\mathbb{P}(B_m) \neq 0$)
  Or, par hypothèse de récurrence, on a :
  $$\mathbb{P}(B_m) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(A_2 \,|\, A_1)\ \mathbb{P}(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2)\ \ldots\ \mathbb{P}(A_m \,|\, A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1})$$
  Ce qui démontre $\mathscr{P}(m+1)$ en réinjectant dans l'identité précédente.

Par principe de récurrence, on a donc : $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathscr{P}(m)$. □

Remarque

- Soit $(A, B) \in (\mathscr{P}(\Omega))^2$. Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on peut démontrer :

$$\mathbb{P}(B \cap A) \ = \ 0$$

En effet : $B \cap A \ \subset \ A$. Ainsi, par croissance de l'application $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(B \cap A) \ \leqslant \ \mathbb{P}(A) = 0$$

On en conclut, comme attendu : $\mathbb{P}(B \cap A) \ = \ 0$.

- Le programme officiel recommande d'adopter la convention suivante :

$$\text{on pose} \quad \mathbb{P}(B \,|\, A) \times \mathbb{P}(A) \ = \ 0 \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(A) \ = \ 0$$

Rappelons que la quantité $\mathbb{P}(B \,|\, A)$ n'est pas bien définie si $\mathbb{P}(A) = 0$. Cependant, adopter cette convention :

× est pratique puisqu'on n'a plus à vérifier d'hypothèse lorsqu'on utilise la formule des probabilités composées.

× ne modifie pas le résulat que l'on doit trouver. Si $\mathbb{P}(A) = 0$ alors, comme vu dans le point précédent $\mathbb{P}(B \cap A) = 0$, ce qui donne le même résultat que l'écriture : $\mathbb{P}(B \cap A) \ = \ \mathbb{P}(B \,|\, A) \times \mathbb{P}(A) \ = \ 0$.

Exemple

Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires.
L'expérience consiste à tirer successivement 3 boules (sans remise).

1) Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient blanches ?

Démonstration.

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note : B_i : « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche » et N_i : « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est noire ».
- D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2 \,|\, B_1) \times \mathbb{P}(B_3 \,|\, B_1 \cap B_2)$$

(on peut écrire cette formule sans hypothèse grâce à la convention précisée dans le programme officiel)

- Tout d'abord : $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{5}{13}$.
- Déterminons maintenant $\mathbb{P}(B_2 \,|\, B_1)$.
  Si l'événement B_1 est réalisé, c'est qu'une boule blanche a été tirée lors du 1^{er} tirage. Dans ce cas, l'événement B_2 est réalisé si et seulement si on tire une boule blanche lors du $2^{\text{ème}}$ tirage, dans une urne contenant 4 blanches et 8 noires. Ainsi : $\mathbb{P}(B_2 \,|\, B_1) = \dfrac{4}{12}$.
- Déterminons enfin $\mathbb{P}(B_3 \,|\, B_1 \cap B_2)$.
  Si l'événement $B_1 \cap B_2$ est réalisé, c'est qu'une boule blanche a été tirée lors du 1^{er} tirage et qu'une boule blanche a été tirée lors du $2^{\text{ème}}$ tirage. Dans ce cas, l'événement B_3 est réalisé si et seulement si on tire une boule blanche lors du $3^{\text{ème}}$ tirage, dans une urne contenant 3 boules blanches et 8 noires. Ainsi : $\mathbb{P}(B_3 \,|\, B_1 \cap B_2) = \dfrac{3}{11}$.
- On en conclut :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3}}{13 \times \cancel{12} \times 11} = \frac{5}{11 \times 13} \simeq 0,035$$

□

2) Quelle est la probabilité qu'une boule noire apparaisse pour la première fois au deuxième tirage ?

Démonstration.

- Avec les mêmes notations : $\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}(N_2 \,|\, B_1)$.
- Déterminons $\mathbb{P}(N_2 \,|\, B_1)$.
  Si l'événement B_1 est réalisé, c'est qu'une boule blanche a été tirée lors du 1^{er} tirage. Dans ce cas, l'événement N_2 est réalisé si et seulement si une boule noire a été tirée au $2^{\text{ème}}$ tirage, dans une urne contenant 4 blanches et 8 noires. Ainsi, $\mathbb{P}_{B_1}(N_2) = \dfrac{8}{12}$.
  On a donc :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \frac{5 \times 8}{13 \times 12} = \frac{5 \times 2}{13 \times 3} = \frac{10}{39} \simeq 0,256$$

□

IV.3. Formule des probabilités totales

IV.3.a) Système quasi-complet d'événements

Exercice

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit $(A, B, C) \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^2$.

On suppose $\mathbb{P}(B) = 0$ et $\mathbb{P}(C) = 1$.

1) Démontrer : $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

2) Démontrer : $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)$.

Démonstration.

1) Comme : $A \cap B \ \subset \ B$ alors, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) \ \leqslant \ \mathbb{P}(B) = 0$$

et comme $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$, on en conclut $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

2) Comme : $A \cup C \ \supset \ C$ alors, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(A \cup C) \ \geqslant \ \mathbb{P}(C) = 1$$

et comme $\mathbb{P}(A \cup C) \leqslant A$, on en conclut $\mathbb{P}(A \cup C) = 1$.

D'autre part, par la formule du crible :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cup C) \\ &= \mathbb{P}(A) + \cancel{1} - \cancel{1} \end{aligned}$$

□

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $I \subset [\![1, n]\!]$ et soit $(A_i)_{i \in I} \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^I$ une famille d'événements.

La famille $(A_i)_{i \in I}$ est un système quasi-complet d'événements si :

(i) $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) = 1$

(ii) Pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $\ A_i \cap A_j = \varnothing$
(les événements sont deux à deux incompatibles)

IV.3.b) Énoncé de la formule des probabilités totales

Théorème 8. *Formule des probabilités totales*

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $I \subset [\![1, n]\!]$.

Soit $(A_i)_{i \in I} \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^I$ un système (quasi-)complet d'événements.

Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}\big(B \cap A_i\big) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}\big(B \,|\, A_i\big) \times \mathbb{P}(A_i) \end{aligned}}$$

(avec la convention $\mathbb{P}\big(B \,|\, A_i\big) \times \mathbb{P}(A_i) = 0$ si $\mathbb{P}(A_i) = 0$)

Démonstration.

1) Démonstration dans le cas où $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements

- Comme $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements : $\Omega = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.
  Ainsi, on a : $B = B \cap \Omega = B \cap \bigcup\limits_{i \in I} A_i = \bigcup\limits_{i \in I} (B \cap A_i)$.
- Démontrons que la famille $(B \cap A_i)_{i \in I}$ est constituée d'événements deux à deux incompatibles. Pour tout $i \in I$, notons : $C_i = B \cap A_i$.
  Il s'agit de démontrer que les événements de la suite $(C_i)_{i \in I}$ sont deux à deux incompatibles.
  Soit $(i, j) \in I^2$. Supposons $i \neq j$. On a alors :
  $$C_i \cap C_j \ = \ (A \cap B_i) \ \cap \ (A \cap B_j) \ = \ A \cap (B_i \cap B_j) \ = \ A \cap \varnothing \ = \ \varnothing$$
- Finalement :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) \Big) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) \qquad \textit{(par (σ-)additivité de $\mathbb{P}$)} \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \,|\, A_i) \times \mathbb{P}(A_i) \end{aligned}$$

2) Démonstration dans le cas où $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet

- Comme $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$.
  Ainsi : $\mathbb{P}\left(B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\right) = \mathbb{P}(B)$.
- On conclut alors comme précédemment :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)\right) && \textit{(par distributivité de la loi } \cap \textit{ par rapport à la loi } \cup\textit{)} \\
&= \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) && \textit{(par } (\sigma\text{-})\textit{additivité de } \mathbb{P}\textit{)} \\
&= \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \,|\, A_i) \times \mathbb{P}(A_i)
\end{aligned}$$

□

Cas particulier du système complet $(A, \bar{A})$
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit A un événement ($A \in \mathscr{A}$).
La famille $(A, \bar{A})$ est alors un système complet d'événements.

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) \\
&= \mathbb{P}(B \,|\, A)\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \,|\, \bar{A})\ \mathbb{P}(\bar{A})
\end{aligned}}$$

Exemple
On considère de nouveau l'urne contenant 5 boules blanches et 8 boules noires. L'expérience consiste à tirer successivement 3 boules.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au deuxième tirage ?

La famille (B_1, N_1) forme un système complet d'événements ($\overline{B_1} = N_1$).
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_2) &= \mathbb{P}(N_2 \cap B_1) + \mathbb{P}(N_2 \cap N_1) \\
&= \mathbb{P}(N_2 \,|\, B_1)\ \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(N_2 \,|\, N_1)\ \mathbb{P}(N_1) \\
&= \frac{8}{12}\ \frac{5}{13} + \frac{7}{12}\ \frac{8}{13} \\
&= \frac{5 \times 2 + 2 \times 7}{3 \times 13} = \frac{24}{3 \times 13} = \frac{8}{13}
\end{aligned}$$

2) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage ?

Il suffit de remarquer : $B_2 = \overline{N_2}$. On a donc directement :

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(\overline{N_2}) = 1 - \mathbb{P}(B_2) = 1 - \frac{8}{13} = \frac{5}{13}$$

(évidemment, on pouvait de nouveau appliquer la formule des probabilités totales mais ce n'est pas la solution adaptée)

Exercice
On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire simultanément deux boules dans cette urne.

a) Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?

b) Même question si on tire les deux boules successivement et avec remise.

c) Quelle est la limite de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$?

Remarque

- La difficulté de cet exercice réside dans le fait que la modélisation mathématique est absente. On insiste ici sur le raisonnement à mener qui est assez naturel et très fréquent dans les exercices.
- La probabilité de tirer 2 boules blanches dépend de l'urne dans laquelle s'effectue le tirage :
  - × soit on tire dans l'urne 1 et dans ce cas ...
  - × soit on tire dans l'urne 2 et dans ce cas ...
  - × ...
  - × soit on tire dans l'urne n et dans ce cas ...
- On voit clairement apparaître un raisonnement par disjonction de cas, ce qui signifie qu'il y a un système complet d'événements sous-jacent.
- L'idée ici est de tester l'événement « obtenir 2 boules » suivant chacun des cas listés précédemment.
  Cela correspond à utiliser la formule des probabilités totales.

Il n'y a plus qu'à formaliser ces idées.

Démonstration.
On note A_k : « le tirage s'effectue dans l'urne k » (pour $k \in [\![1,n]\!]$).
On note B : « on tire deux boules blanches ».

a) La famille $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements.
On en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(B \cap A_k\big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(B \,|\, A_k\big) \times \mathbb{P}(A_k)$$

Or, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\mathbb{P}\big(B \,|\, A_k\big) = \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{\frac{k!}{2!(k-2)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}} = \frac{k!}{\cancel{2!}(k-2)!} \times \frac{\cancel{2!}(n-2)!}{n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

En effet, si A_k est réalisé, c'est que le tirage se fait dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
Un 2-tirage réalisant B est un ensemble de 2 entiers représentant des boules blanches (un ensemble de 2 entiers différents de $[\![1,k]\!]$).
Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :
× *le numéro des 2 boules blanches parmi les k présentes : $\binom{k}{2}$ possibilités.*
Il y a donc $\binom{k}{2}$ tels 2-tirages.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k\,(k-1)}{n\,(n-1)} = \frac{1}{n^2\,(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k\,(k-1) \\
&= \frac{1}{n^2\,(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right) \\
&= \frac{1}{n^2\,(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{6\,n^2\,(n-1)} \big((2n+1) - 3\big) = \frac{n(n+1)}{6\,n^2\,(n-1)}\, 2(n-1) \\
&= \frac{\cancel{n}(n+1)}{6\,n^{\cancel{2}}\,\cancel{(n-1)}}\, 2\cancel{(n-1)} = \frac{1}{3}\, \frac{n+1}{n}
\end{aligned}$$

b) Par le même raisonnement, on obtient :

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(B \cap A_k\big) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(B \cap A_k\big) \times \mathbb{P}(A_k)$$

Dans le cas d'un tirage successif avec remise, on a, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}\big(B \,|\, A_k\big) \;=\; \frac{k \times k}{n \times n}$$

En effet, si A_k est réalisé c'est que le tirage se fait dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
Un 2-tirage réalisant B est un couple dont les deux coefficients sont des numéros de boules blanches (des éléments de $[\![1, k]\!]$).
Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :

- × *son premier coefficient (un numéro de $[\![1, k]\!]$) :*
  $\binom{k}{1} = k$ *possibilités.*
- × *son deuxième coefficient (un numéro de $[\![1, k]\!]$) :*
  $\binom{k}{1} = k$ *possibilités.*

Il y a donc $k \times k$ tels 2-tirages.

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) \;&=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{\cancel{k} \times k}{n \times n} \;=\; \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \;=\; \frac{1}{n^3}\, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &=\; \frac{1}{6}\, \frac{n+1}{n}\, \frac{2n+1}{n} \;=\; \frac{1}{3}\, \frac{n+1}{n}\, \frac{n+\frac{1}{2}}{n}\end{aligned}$$

c) $\dfrac{1}{3}\,\dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3}\,\dfrac{n}{n} \;=\; \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{3}\,\dfrac{n+1}{n}\,\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3}\,\dfrac{n}{n}\,\dfrac{n}{n} \;=\; \dfrac{1}{3}$

Dans les deux cas, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{3}$. □

IV.3.c) Formule de Bayes

Théorème 9. *Formule de Bayes*

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $I \subset [\![1, n]\!]$.
Soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathscr{A}^I$ un système (quasi-)complet d'événements.
Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

$$\boxed{\mathbb{P}\big(A \,|\, B\big) \;=\; \frac{\mathbb{P}\big(A \cap B\big)}{\mathbb{P}(B)} \;=\; \frac{\mathbb{P}\big(B \,|\, A\big)\ \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \;=\; \frac{\mathbb{P}\big(A \,|\, B\big)\ \mathbb{P}(B)}{\sum\limits_{i\in I} \mathbb{P}\big(B \cap A_i\big)}}$$

En particulier, pour tout $j \in I$:

$$\boxed{\mathbb{P}\big(A_j \,|\, B\big) \;=\; \frac{\mathbb{P}\big(A_j \,|\, B\big)\ \mathbb{P}(B)}{\sum\limits_{i\in I} \mathbb{P}\big(B \cap A_i\big)} \;=\; \frac{\mathbb{P}\big(A_j \,|\, B\big)\ \mathbb{P}(B)}{\sum\limits_{i\in I} \mathbb{P}\big(B \,|\, A_i\big)\ \mathbb{P}(A_i)}}$$

Démonstration.
La première égalité n'est autre que la formule 3) de la proposition 6.
La seconde égalité est une conséquence directe de la FPT. □

Cas particulier du système complet $(A, \bar{A})$
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit A est un événement $(A \in \mathscr{A})$.
La famille $(A, \bar{A})$ est alors un système complet d'événements.
Pour tout $B \in \mathscr{A}$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}\big(A \,|\, B\big) \;=\; \frac{\mathbb{P}\big(B \,|\, A\big)\ \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \;=\; \frac{\mathbb{P}\big(B \,|\, A\big)\ \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}\big(B \,|\, A\big)\ \mathbb{P}(A) \;+\; \mathbb{P}\big(B \,|\, \bar{A}\big)\ \mathbb{P}(\bar{A})}}$$

Exemple
On considère de nouveau l'urne contenant 5 boules blanches et 8 boules noires. Le second tirage ayant donné une boule blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche ?

Démonstration.
La famille (B_1, N_1) forme un système complet d'événements ($\overline{B_1} = N_1$).
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}\big(B_2 \cap B_1\big) \ + \ \mathbb{P}\big(B_2 \cap N_1\big) \\
&= \mathbb{P}\big(B_2 \,|\, B_1\big)\ \mathbb{P}(B_1) \ + \ \mathbb{P}\big(B_2 \,|\, N_1\big)\ \mathbb{P}(N_1) \\
&= \frac{4}{12} \times \frac{5}{13} + \frac{5}{12} \times \frac{8}{13} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{5}{13} + \frac{5}{3} \times \frac{2}{13} \\
&= \frac{15}{3 \times 13}
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(B_1 \,|\, B_2\big) &= \frac{\mathbb{P}\big(B_1 \,|\, B_2\big)\ \mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(B_2)} \\
&= \frac{\frac{4}{12} \times \frac{5}{13}}{\frac{15}{3 \times 13}} \\
&= \frac{5 \times 4}{12 \times \cancel{13}} \times \frac{3 \times \cancel{13}}{15} \\
&= \frac{5}{15} \ = \ \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

□

Formule des causes
La formule $\mathbb{P}\big(A \,|\, B\big) = \dfrac{\mathbb{P}\big(B \,|\, A\big)\ \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$ est connue sous le nom de « formule des causes ». Si l'on considère l'événement B comme étant ultérieur à l'événement A, cette formule peut paraître étonnante puisqu'elle ne suit pas l'ordre chronologique. On calcule en effet la probabilité de l'événement A (antérieur à B) sachant que B est réalisé.

Exercice
Deux urnes sont remplies de boules. La première contient 10 boules noires et 30 boules blanches. La seconde contient 20 boules noires et 20 boules blanches. On tire une des urnes au hasard, de façon équiprobable, et dans cette urne, on tire une boule au hasard. La boule est blanche.
Quelle est la probabilité qu'on ait tiré cette boule dans la première urne sachant qu'elle est blanche ?

V. Indépendance en probabilité

V.1. Indépendance de deux événements

V.1.a) Définition

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$.

- Les événements A et B sont **indépendants pour la probabilité** $\mathbb{P}$ si :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}$$

Remarque

- Il ne faut pas confondre cette propriété, **liée à une probabilité** $\mathbb{P}$ avec celle d'incompatibilité qui ne dépend que des événements !
- Mieux : deux événements A et B incompatibles ne sont généralement pas indépendants (sauf si ...).

Théorème 10.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$

1) Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors on a :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\big(B \,|\, A\big)}$$

2) Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors on a :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\big(A \,|\, B\big)}$$

La notion d'indépendance n'est pas une notion intrinsèque aux événements : elle dépend fortement de la probabilité choisie. Autrement dit, deux événements peuvent être indépendants pour une probabilité et dépendants pour une autre.

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé 6.

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- On note A : « le résultat obtenu est inférieur à deux ».
- On note B : « le résultat obtenu est supérieur à quatre ».

On cherche à déterminer si A et B sont indépendants suivant deux probabilités différentes. Remarquons tout d'abord :

$$A \cap B = \varnothing \quad \text{et ainsi} \quad \mathbb{P}\big(A \cap B\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \quad \textit{(pour toute application probabilité } \mathbb{P}\textit{)}$$

Cas 1 : dé équilibré

L'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est donc muni de la probabilité uniforme, notée ici $\mathbb{P}^1$ (définie par : $\mathbb{P}^1(\{1\}) = \ldots = \mathbb{P}^1(\{6\}) = \frac{1}{6}$).

$$\text{On a alors :} \quad \mathbb{P}^1(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre d'issues totales}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{et :} \quad \mathbb{P}^1(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } B}{\text{nombre d'issues totales}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Et ainsi : $\mathbb{P}^1\big(A \cap B\big) = 0 \neq \dfrac{1}{6} = \mathbb{P}^1(A) \times \mathbb{P}^1(B)$.

Les événements A et B ne sont pas indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}^1$.

Cas 2 : dé pipé

On considère un dé pour lequel on obtient 1 avec la probabilité 1.
Autrement dit, l'espace est muni de la probabilité $\mathbb{P}^2$ déterminée par :

$$\mathbb{P}^2(\{1\}) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^2(\{2\}) = \ldots = \mathbb{P}^2(\{6\}) = 0$$

$$\text{On a alors :} \quad \mathbb{P}^2(A) = \mathbb{P}^2\big(\{1, 2\}\big) = \mathbb{P}^2\big(\{1\}\big) + \mathbb{P}^2\big(\{2\}\big) = 1$$

$$\text{et :} \quad \mathbb{P}^2(B) = \mathbb{P}^2\big(\{4, 5, 6\}\big) = \mathbb{P}^2\big(\{4\}\big) + \mathbb{P}^2\big(\{5\}\big) + \mathbb{P}^2\big(\{6\}\big) = 0$$

(par additivité, les événements considérés étant incompatibles)

Et ainsi : $\mathbb{P}^2\big(A \cap B\big) = 0 = 0 = \mathbb{P}^2(A) \times \mathbb{P}^2(B)$.

Ainsi, les événements A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}^2$.

Remarque

- Dans l'exemple précédent A et B sont incompatibles mais non indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}^1$. C'est une illustration de la propriété suivante.

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ incompatibles } \not\Rightarrow \ A \text{ et } B \text{ indépendants (pour } \mathbb{P})}$$

- La réciproque n'est pas vérifiée non plus. Plus précisément :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ incompatibles } \not\Leftarrow \ A \text{ et } B \text{ indépendants (pour } \mathbb{P})}$$

Illustrons cette propriété dans l'exemple suivant.

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé 6.

On note A : « le premier chiffre est pair ».

On note B : « le second chiffre est impair ».

L'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.

Le dé est supposé équilibré : on munit Ω de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.

- On a alors : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times \cancel{6}}{6 \times \cancel{6}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

  et : $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times \cancel{6}}{6 \times \cancel{6}} = \dfrac{1}{2}$

- Par ailleurs : $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times 3}{6 \times 6} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}$

  En effet :

$$A \ \cap \ B = \{(2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3), (4,5), (6,1), (6,3), (6,5)\}$$

- Finalement :
  - × les événements A et B sont indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$) puisque :

$$\mathbb{P}\big(A \cap B\big) \ = \ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \ = \ \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

  - × les événements A et B ne sont pas incompatibles (puisque $A \cap B \neq \varnothing$).

V.1.b) Indépendance et événements contraires

Théorème 11.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$.

Supposons que A et B sont indépendants.

1) *Les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.*

2) *Les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.*

3) *Les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

Démonstration.

1) Démontrons que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A)\,(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(\overline{B}) \end{aligned}$$

2) Supposons A et B indépendants.
On a évidemment B et A indépendants.
Ainsi, par la propriété ***1)***, on obtient que B et $\overline{A}$ sont indépendants.

3) Supposons A et B indépendants.
Par la propriété ***1)***, on a : A et $\overline{B}$ indépendants.
Par la propriété ***2)***, on a : $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants.

□

Exercice

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

a. Supposons $\mathbb{P}(A) = 0$.
Démontrer que, pour tout $B \in \mathscr{A}$, A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$.

b. Supposons $\mathbb{P}(A) = 1$.
Démontrer que, pour tout $B \in \mathscr{A}$, A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$.

Démonstration.

a. Comme : $A \cap B \ \subset \ A$, on a alors : $\mathbb{P}(A \cap B) \ \leqslant \ \mathbb{P}(A) = 0$.
Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Finalement :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Les événements A et B sont bien indépendants pour $\mathbb{P}$.

b.
- Tout d'abord : $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0$.
  On déduit de la question précédente que les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.
- Comme $A \cup \overline{A} = \Omega$, on a : $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = \Omega \cap B = B$.
  D'où, par additivité ($(A \cap B)$ et $(\overline{A} \cap B)$ sont incompatibles) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(B) \quad \textit{(car } \overline{A} \textit{ et } B \textit{ sont indépendants)} \end{aligned}$$

D'où : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$. Enfin, comme $\mathbb{P}(A) = 1$, on en déduit :

$$\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \ = \ \mathbb{P}(A \cap B)$$

□

V.2. Indépendance mutuelle d'une famille d'événements

V.2.a) Définition

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $I \subset [\![1, n]\!]$ et soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathscr{A}^I$ une famille d'événements.

- On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont **mutuellement indépendants pour la probabilité** $\mathbb{P}$ si :

$$\boxed{\forall J \subset [\![1, n]\!], \quad \left.\begin{array}{c} J \textbf{ fini} \\ J \subset I \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_i\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)}$$

Exemple

On considère de nouveau l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé 6. On rappelle et complète la liste des événements considérés.

On note A : « le premier chiffre est pair ».

On note B : « le second chiffre est impair ».

On note C : « la somme des chiffres est paire ».

Le dé est ici considéré équilibré et on note $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme.
Les événements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?
Par définition, c'est le cas si et seulement si on a :

a) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

b) $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$

c) $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$

d) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$

Étudions si ces propriétés sont vérifiées.

a) On a déjà démontré que A et B sont indépendants.

b) $\mathbb{P}(A \cap C) = \dfrac{\text{Card}(A \cap C)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times 3}{6 \times 6} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

La famille $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'événements.
Par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{P}(C) & = & \mathbb{P}(A \cap C) & + & \mathbb{P}(\overline{A} \cap C) & & \\ & = & \dfrac{1}{4} & + & \dfrac{1}{4} & = & \dfrac{1}{2} \end{array}$$

On a donc bien : $\mathbb{P}(A \cap C) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$.

c) $\mathbb{P}(B \cap C) = \dfrac{\text{Card}(B \cap C)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times 3}{6 \times 6} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

On a donc bien : $\mathbb{P}(B \cap C) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$

d) Comme $A \cap B \cap C = \varnothing$ alors $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

Or : $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Finalement : $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$.

On en conclut que les événements de la famille (A, B, C) ne sont pas mutuellement indépendants.

Remarque
Dans cet exemple, on a démontré que :

× les événements A et B sont indépendants.

× les événements A et C sont indépendants.

× les événements B et C sont indépendants.

Les événements de la famille (A, B, C) sont donc 2 à 2 indépendants. Pour autant, la conclusion de l'exercice est que ces événements ne sont pas mutuellement indépendants.

V.2.b) Indépendance et événements contraires (généralisation)

Théorème 12.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(A_1, \dots, A_m)$ une famille d'événements.

Notons $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$.
(autrement dit $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$)

Les événements de la famille $(A_1, \dots, A_m)$ sont (mutuellement) indépendants	$\Rightarrow$	*Les événements de la famille $(B_1, \dots, B_m)$ sont (mutuellement) indépendants*

Démonstration.
On commence par démontrer que si $A_1, \dots, A_m$ sont mutuellement indépendants, il en est de même pour $A_1, \dots, A_{k-1}, \overline{A_k}, A_{k+1}, \dots, A_m$ où $k \in [\![1, m]\!]$.

Pour ce faire, on prend $I \subset [\![1, m]\!]$ et on distingue :

× le cas où $k \notin I$ (facile !),

× le cas où $k \in I$ (plus technique).

Une fois ce résultat démontré, il suffit de l'appliquer pour tous les événements contraires apparaissant dans la famille $(B_1, \dots, B_m)$. $\square$

Exercice
Soient A, B et C des événements mutuellement indépendants.
Montrer que A et $B \cup C$ sont indépendants.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\big(A \ \cap \ (B \cup C)\big) \\ = \ & \mathbb{P}\big((A \cap B) \ \cup \ (A \cap C)\big) \\ = \ & \mathbb{P}\big(A \cap B\big) + \mathbb{P}\big(A \cap C\big) - \mathbb{P}\big(A \cap B \cap C\big) \\ = \ & \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) \quad \textit{(car les événements } A, B \textit{ et } C \textit{ sont indépendants)} \end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(B \cup C\big) &= \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}\big(B \cap C\big) \\ &= \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) \quad \textit{(car } B \textit{ est } C \textit{ sont indépendants)} \end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}\big(B \cup C\big) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) \\ &= \mathbb{P}\big(A \ \cap \ (B \cup C)\big) \end{aligned}$$

Ainsi, les événements A et $B \cup C$ sont bien indépendants. $\square$

MÉTHODO **Calcul de probabilités** *(bilan du chapitre)*

Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

0) Introduction des événements basiques (le fait d'avoir tiré une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu pile au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu un 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage ...) liés à l'expérience considérée.
Nommage de l'événement A dont on cherche à déterminer la probabilité.
(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)

1) Décomposition de l'événement A à l'aide d'événements basiques.

2) Deux cas se présentent alors :

(i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{union / incompatibilité / somme}}$$

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
  - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Dans le cas d'une union infinie d'événements (PSI)

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :
  - × si c'est le cas, on utilise la σ-additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{intersection / indépendance / produit}}$$

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.
  - × si c'est le cas, on utilise la formule associée.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la Formule des Probabilités Composées (FPC).

Dans le cas d'une intersection infinie d'événements (PSI)

- On se ramène au cas d'une intersection finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une union d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

Remarque

- Il est à noter que la Formule des Probabilités Totales (FPT) rentre dans ce schéma. En effet, si la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements, alors tout événement B s'écrit comme une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles.
$$B \;=\; \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B \;=\; \bigcup_{i\in I} \big(A_i \cap B\big)$$
- L'étape de décomposition des événements est **primordiale**.
On raisonne TOUJOURS sur les événements et JAMAIS directement sur les probabilités.

$$\cancel{\mathbb{P}(A) = 0 \text{ car c'est la probabilité d'obtenir } \ldots}$$