CH X : Systèmes linéaires et matrices

I. Généralités sur les systèmes linéaires

Définition

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

On appelle **système linéaire** de n équations à p inconnues x_1, ..., x_p tout système de la forme :

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}\, x_1 & + & a_{1,2}\, x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}\, x_p & = & b_1 & & L_1 \\ a_{2,1}\, x_1 & + & a_{2,2}\, x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}\, x_p & = & b_2 & & L_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1}\, x_1 & + & a_{n,2}\, x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}\, x_p & = & b_n & & L_n \end{array} \right.$$

× les réels $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ sont les **coefficients** du système.

× le n-uplet de réels $(b_1, \dots, b_n)$ est le **second membre** du système.

× la $i^{\text{ème}}$ équation du système est notée L_i : c'est la $i^{\text{ème}}$ ligne du système.

× le système (S) est dit **homogène** si $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$.

× on appelle **système homogène associé à** (S) et on note (S_H) le système (S) dont le second membre est remplacé par $(0, \dots, 0)$.

× on appelle **solution** de (S) tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ qui satisfait les n équations du système (S).

× si $n = p$ le système (S) sera dit **système de Cramer** s'il admet un unique n-uplet solution.

× deux systèmes (S_1) et (S_2) sont dits **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions. On notera alors : $(S_1) \Leftrightarrow (S_2)$.

Remarque

- Tout système homogène admet au moins une solution, le p-uplet $(0, \dots, 0)$.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3\,x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & 5\,y & + & z & = & 0 \\ -4\,x & + & 2\,y & + & 7z & = & 0 \end{array} \right.$$

  admet $(0, 0, 0)$ pour solution.

- Un système homogène admettant le même nombre d'équations que d'inconnues ($n = p$) est donc de Cramer ssi $(0, \dots 0)$ est son unique solution.
- Un système (S) peut n'admettre aucune solution :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 3 \\ & & y & + & z & = & -7 \\ -x & & & + & z & = & -5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 3 \\ & & y & + & z & = & -7 \\ & & y & + & z & = & -2 \end{array} \right.$$

  Les lignes L_2 et L_3 sont dites **incompatibles**.

- Un système (S) peut admettre une unique solution :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3\,x & + & 2\,y & + & z & = & 5 \\ x & & & + & z & = & 7 \\ 2\,x & + & 2\,y & + & z & = & 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (1, -2, 6)$$

- Un système (S) peut admettre une infinité de solutions :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & -2 \\ -x & & & + & 2\,z & = & -5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & -2 \\ & & y & + & z & = & -2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & = & 3 & + & z \\ & & y & = & -2 & - & z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (5 + 2z, -2 - z, z)$$

  Ainsi, $(5, -2, 0)$, $(7, -3, 1)$, $(-1, 1, -3)$ ... sont solutions.

II. Résolution d'un système linéaire : aspect théorique

II.1. Les systèmes échelonnés et triangulaires supérieurs

Définition

Soit (S) un système linéaire de n équations et p inconnues.

- Le système (S) est dit **échelonné** lorsque :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], \quad i > j \ \Rightarrow \ a_{i,j} = 0$$

- Le système (S) est dit **triangulaire (supérieur)** si :
  1) il a le même nombre d'équations que d'inconnues ($n = p$),
  2) il est échelonné.

Cette définition n'est pas très stricte. Par exemple, un système linéaire dont tous les coefficients sont nuls, est un système échelonné.

II.2. Résolution d'un système triangulaire (cas $n = p$)

Un système triangulaire supérieur à n équations et n inconnues est de la forme suivante.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\
 & & a_{2,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{2,n}\,x_n & = & b_2 \\
 & & & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & a_{i,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{i,n}\,x_n & = & b_i \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & a_{n,n}\,x_n & = & b_n
\end{array}\right.$$

Si on suppose de plus que tous les coefficients diagonaux sont non nuls, alors on peut résoudre aisément ce système « en cascade » :

× la dernière équation fournit : $x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$.

× on substitue x_n par sa valeur dans l'équation précédente, ce qui permet d'obtenir x_{n-1}.

Par remontées successives, on obtient de manière unique toutes les valeurs de x_i. On obtient ainsi un unique n-uplet solution.

Il est primordial de supposer que tous les coefficients diagonaux sont non nuls. Par la suite, on nomme $(\mathtt{H})$ cette hypothèse : $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], a_{i,i} \neq 0}$.

Théorème 1.

Soit (S) un système linéaire tel que :

× *(S) a n équations et n inconnues,*

× *(S) est triangulaire (supérieur),*

× *(S) vérifie l'hypothèse $(\mathtt{H})$.*

Alors (S) est un système de Cramer.
(ce qui revient à dire que (S) possède une unique solution)

Exemple

On peut résoudre le système suivant en cascade.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
x & + & y & + & 2\,z & - & t & = & 3 \\
 & & 3\,y & + & 5\,z & + & 2\,t & = & -7 \\
 & & & & z & - & t & = & 0 \\
 & & & & & & t & = & 2
\end{array}\right.$$

Par remontées successives, ce système admet une unique solution : $(8, -7, 2, 2)$.

Remarque

Le caractère unique est fourni par les deux conditions : $n = p$ et $\mathtt{H}$.
Si cette hypothèse $(\mathtt{H})$ n'est pas vérifiée, alors :

× le système peut n'avoir aucune solution.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
x & + & y & + & 2\,z & - & t & = & 3 \\
 & & & & 5\,z & - & 2\,t & = & 8 \\
 & & & & z & - & t & = & 0 \\
 & & & & & & t & = & 2
\end{array}\right.$$

× le système peut avoir une infinité de solution.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
x & + & y & + & 2\,z & - & t & = & 3 \\
 & & & & 5\,z & - & 2\,t & = & 6 \\
 & & & & z & - & t & = & 0 \\
 & & & & & & t & = & 2
\end{array}\right.$$

II.3. Résolution d'un système échelonné (cas $n < p$)

Un système échelonné est alors de la forme suivante.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{1,n}\,x_n & + & \dots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\
 & & a_{2,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{2,n}\,x_n & + & \dots & + & a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \\
 & & & & \ddots & & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & a_{i,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{i,n}\,x_n & + & \dots & + & a_{i,p}\,x_p & = & b_i \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & a_{n,n}\,x_n & + & \dots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

Plaçons-nous dans le cas où l'hypothèse (H) est vérifiée ($\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} \neq 0$).

- On va alors distinguer les inconnues $x_{n+1}, \dots, x_p$, appelées **inconnues auxiliaires**. En transférant ces inconnues auxiliaires dans le membre droit, on fait apparaître un membre gauche à n lignes et n colonnes, correspondant au cas précédent.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccccc}
a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{1,n}\,x_n & = & b_1 & - & a_{1,n+1}\,x_{n+1} & - & \dots & - & a_{1,p}\,x_p \\
 & & a_{2,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{2,n}\,x_n & = & b_2 & - & a_{2,n+1}\,x_{n+1} & - & \dots & - & a_{2,p}\,x_p \\
 & & & & & & a_{i,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{i,n}\,x_n & = & b_i & - & a_{i,n+1}\,x_{n+1} & - & \dots & - & a_{i,p}\,x_p \\
 & & & & & & & & & & a_{n,n}\,x_n & = & b_n & - & a_{n,n+1}\,x_{n+1} & - & \dots & - & a_{n,p}\,x_p
\end{array}\right.$$

- Une résolution en cascade de ce système fournit alors toutes les valeurs de x_i ($i \in [\![1,n]\!]$) en fonction des variables auxiliaires. On obtient ainsi une infinité de solutions.

Théorème 2.

Soit (S) un système linéaire tel que :

- *(S) a n équations, p inconnues et $n < p$,*
- *(S) est échelonné,*
- *(S) vérifie* (H).

Alors (S) possède une infinité de solutions.

Exemple

On peut résoudre le système suivant en cascade.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
x & + & y & + & 2\,z & - & t & = & 3 \\
 & & 3\,y & + & 5\,z & + & 2\,t & = & -7 \\
 & & & & z & - & t & = & 0
\end{array}\right.$$

Remarque

L'existence de solution est fourni par la condition : (H).

Si cette hypothèse (H) n'est pas vérifiée alors :

× le système peut n'avoir aucune solution.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
x & + & y & + & 2\,z & - & t & = & 3 \\
 & & & & -2\,z & + & 2\,t & = & 5 \\
 & & & & z & - & t & = & 0
\end{array}\right.$$

(sytème à résoudre !)

× le système peut avoir une infinité de solutions.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
x & + & y & + & 2\,z & - & t & = & 3 \\
 & & & & 5\,z & - & 2\,t & = & 6 \\
 & & & & z & - & t & = & 0
\end{array}\right.$$

(sytème à résoudre !)

En conclusion, la résolution d'un système triangulaire supérieur est simple. Il convient donc d'essayer de transformer tout système en un système triangulaire supérieur. Ceci peut se faire à l'aide des opérations élémentaires.

III. La méthode du pivot de Gauss

III.1. Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire

On commence par introduire la notion d'opération élémentaire, nécessaire pour décrire précisément la méthode du pivot.

Définition
On appelle **opération élémentaire sur les lignes** $L_1, \ldots, L_n$ d'un système (S) l'une des trois opérations suivantes :

1) multiplier la ligne L_i par un réel $\alpha \neq 0$:

$$\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i}$$

2) ajouter à la ligne L_i β fois une autre ligne L_j :

$$\boxed{L_i \leftarrow L_i + \beta L_j}$$

3) échanger les lignes L_i et L_j :

$$\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$$

Remarque
À l'aide de ces trois opérations de base, on peut construire de nouvelles opérations. On peut notamment citer l'opération suivante :

4) multiplier une ligne L_i par $\alpha \neq 0$ et lui ajouter β fois une autre ligne L_j :

$$\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j}$$

qui admet la généralisation suivante :

4') multiplier une ligne L_i par $\alpha \neq 0$ et lui ajouter une combinaison linéaire d'autres lignes :

$$\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i + \lambda_1 L_{j_1} + \cdots + \lambda_r L_{j_r}}$$

L'intérêt de ces opérations élémentaires réside dans le théorème suivant.

Théorème 3.
Soit (S) un système linéaire.
Soit (S') un système linéaire obtenu par applications successives d'opérations élémentaires sur les lignes de (S).
Alors (S) et (S') sont équivalents.

III.2. Illustration de la méthode sur un exemple

Effectuer une opération élémentaire sur un système (S) ne change pas son ensemble des solutions. L'algorithme du pivot de Gauss exploite ce constat. Il se déroule en trois étapes.

A. Par une succession d'opérations élémentaires, on transforme le système (S) en un système échelonné qui admet les mêmes solutions.

B. Si besoin (si le système obtenu en ***A.*** n'est pas triangulaire), on transfère les inconnues auxiliaires dans le membre droit du sytème.
Le système obtenu est triangulaire.

C. On résout par cascade le système triangulaire précédent.
Au lieu d'opérer par substitution (méthode malhabile), on réalise une succession d'opérations élémentaires pour obtenir un système diagonal.
Ses solutions sont celles du système initial (S).

Illustrons ce procédé par la résolution du système linéaire suivant.

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 5y & - & 3z & + & 4w & = & 5 \\ 5x & + & 12y & - & 7z & + & 20w & = & 12 \\ x & + & 2y & - & 2z & + & 3w & = & 2 \end{array} \right.$$

A. Mise sous forme échelonnée de (S).

1) On considère tout d'abord la première colonne.
Le but est de ne conserver qu'une occurrence de x dans cette colonne.

- Plus précisément, on ne conserve que l'occurrence de x en $1^{\text{ère}}$ ligne en ajoutant / retirant suffisamment de fois la $1^{\text{ère}}$ ligne aux autres.

$$(S) \underset{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2L_2 - 5L_1}{\iff}} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 5y & - & 3z & + & 4w & = & 5 \\ & - & y & + & z & + & 20w & = & -1 \\ & - & y & - & z & + & 2w & = & -1 \end{array} \right.$$

> On appelle **pivot** de cette $1^{\text{ère}}$ étape le coefficient placé devant x dans la ligne utilisée. Ici, le pivot est 2.

2) On met alors de côté la $1^{\text{ère}}$ ligne (on la garde dans le système mais elle n'aura plus de rôle à jouer lors de l'étape ***A***). On obtient ainsi un sous-système qui ne contient plus aucune occurrence de la variable x.

- Sur ce sous-système, on utilise le procédé détaillé en ***1)*** sur la variable y.

$$(S) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 5y & - & 3z & + & 4w & = & 5 \\ & - & y & + & z & + & 20w & = & -1 \\ & & & - & 2z & - & 18w & = & 0 \end{array} \right.$$

> Le pivot de la $2^{\text{ème}}$ étape est le coefficient placé devant la variable y de la ligne utilisée. Ici, il s'agit de -1.

3) Si on met de côté les lignes L_1 et L_2, on obtient un système qui ne contient plus les variables x et y. Ce système amputé ne contient plus qu'une seule ligne et le procédé s'arrête alors.

> Le pivot de la $3^{\text{ème}}$ étape (où l'on ne fait rien) est le coefficient placé devant la variable z. Ici, il s'agit de -2.

Le système obtenu à la fin de l'étape ***A.*** :

× possède les mêmes solutions que le système initial (S), *(d'après le Théorème 3)*

× est échelonné.

On passe alors à l'étape ***B***.

B. Mise sous forme triangulaire du système obtenu.

Avant de passer à l'étape suivante, on transfère le(s) colonne(s) d'inconnue(s) auxiliaire(s) dans le membre droit. Ici, deux choix sont possibles : on peut transférer soit la colonne de z, soit la colonne de w (dans les deux cas, un tel transfert produit un système triangulaire). On choisit ici le transfert de la colonne de w.

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 5y & - & 3z & = & 5 & - & 4w \\ & - & y & + & z & = & -1 & - & 20w \\ & & & - & 2z & = & 0 & + & 18w \end{array} \right.$$

Le système obtenu est triangulaire.

C. Mise sous forme diagonale et résolution du système.

On utilise le même procédé qu'en ***A.1)*** en traitant les colonnes de droite à gauche et les variables dans l'ordre inverse du ***A.1)***.

1) On commence par la $3^{\text{ème}}$ colonne et la variable z.
Le but est de ne conserver qu'une occurrence de z dans cette colonne.

- Pour ce faire, on ajoute / retranche suffisamment de fois la $3^{\text{ème}}$ ligne aux autres lignes au-dessus.

$$(S) \underset{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3}{\overset{L_1 \leftarrow 2L_1 - 3L_3}{\iff}} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 4x & + & 10y & & & = & 10 & - & 62w \\ & - & 2y & & & = & -2 & - & 22w \\ & & & - & 2z & = & 0 & + & 18w \end{array} \right.$$

2) On agit alors de même pour la $2^{\text{ème}}$ colonne et y : on ajoute / retranche suffisamment de fois la $2^{\text{ème}}$ ligne aux autres lignes au-dessus.

$$(S) \overset{L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 4x & & & & & = & 0 & - & 172w \\ & - & 2y & & & = & -2 & - & 22w \\ & & & - & 2z & = & 0 & + & 18w \end{array} \right.$$

3) Le système obtenu est diagonal.
L'algortihme du pivot de Gauss est alors terminé.
Afin d'obtenir une présentation plus agréable, on peut diviser chaque ligne par le coefficient devant la variable x, y et z.

$$(S) \quad \overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{4} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3}}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & = & 0 & - & 43\,w \\ & y & & = & 1 & + & 11\,w \\ & & z & = & 0 & - & 9\,w \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions de (S) est $\{(-43\,w, 1+11\,w, -9\,w, w) \mid w \in \mathbb{R}\}$.

Théorème 4.

Soit (S) un système linéaire.

Par application de la méthode du pivot de Gauss, on transforme (S) en un système diagonal (tous les coefficients non diagonaux sont nuls) équivalent.

Théorème 5.

Soit (S) un système linéaire à n équations et n inconnues.

(S) est un système de Cramer	$\Longleftrightarrow$	*L'algorithme du pivot de Gauss fait apparaître n pivots successifs non nuls*

Démonstration.
C'est n'est qu'une reformulation du Théorème 1. □

III.3. De l'art de bien choisir les pivots à chaque étape

III.3.a) Faut-il effectuer des échanges de lignes ?

Dans l'exemple précédent, on n'a jamais effectué d'échanges de lignes. Pour résoudre un système, on peut utiliser des échanges entre lignes car ces échanges sont des opérations élémentaires qui laissent inchangées les solutions du système considéré. Il est à noter que ces échanges ont pour conséquence de modifier les pivots choisis à chaque étape. Il est alors naturel de se poser la question de l'intérêt d'un tel échange de lignes.

Reprenons l'exemple précédent. Il était possible d'agir comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2\,x & + & 5\,y & - & 3\,z & + & 4\,w & = & 5 \\ 5\,x & + & 12\,y & - & 7\,z & + & 20\,w & = & 12 \\ x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 2 \\ 5\,x & + & 12\,y & - & 7\,z & + & 20\,w & = & 12 \\ 2\,x & + & 5\,y & - & 3\,z & + & 4\,w & = & 5 \end{array} \right.$$

(cet échange permet de considérer un pivot égal à 1)

$$\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 2 \\ & & 2\,y & + & 3\,z & + & 5\,w & = & 2 \\ & & y & + & z & - & 2\,w & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 2 \\ & & y & + & z & - & 2\,w & = & 1 \\ & & 2\,y & + & 3\,z & + & 5\,w & = & 2 \end{array} \right.$$

(cet échange permet de considérer un pivot égal à 1)

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 2 \\ & & y & + & z & - & 2\,w & = & 1 \\ & & & & z & + & 9\,w & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 2 & - & 3\,w \\ & & y & + & z & = & 1 & + & 2\,w \\ & & & & z & = & & - & 9\,w \end{array} \right.$$

$$\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3}}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2\,y & & = & 2 & - & 21\,w \\ & & y & & = & 1 & + & 11\,w \\ & & & z & = & & - & 9\,w \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} x & & & = & & - & 43\,w \\ & y & & = & 1 & + & 11\,w \\ & & z & = & & - & 9\,w \end{array} \right.$$

On remarque tout d'abord que le choix des pivots ne change globalement pas la procédure de résolution. Par une suite d'opérations élémentaires, on transforme le système initial en un système échelonné, puis triangulaire (à l'aide d'une variable auxiliaire) et enfin diagonal. Les deux échanges de lignes sont deux opérations qui s'ajoutent à la liste des autres opérations. De ce point de vue, on **alourdit** la procédure de résolution. La question qui se pose est alors de savoir si chaque échange a rendu les opérations effectuées plus simples. Ponctuellement, la réponse est plutôt oui : avoir un 1 en pivot permet de simplifier les opérations faites à l'aide de ce pivot. Mais ces nouvelles opérations modifient le système et il n'est pas clair que ce nouveau système soit plus simple à résoudre que le système obtenu sans échange de lignes.

Si on reprend l'exemple précédent, sans faire le premier échange de lignes, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 5y & - & 3z & + & 4w & = & 5 \\ & - & y & + & z & + & 20w & = & -1 \\ & - & y & - & z & + & 2w & = & -1 \end{array}\right.$$

Il est alors très simple de placer un nouveau zéro en lieu et place du coefficient devant la variable y en 3$^{\text{ème}}$ ligne (il suffit d'effectuer l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$). Le sous-système obtenu est ici plus simple que celui qu'on obtient en procédant au préalable à un échange de ligne.

Conclusion

Une opération d'échange de lignes a l'avantage suivant :

- × elle permet de simplifier ponctuellement une étape de calcul.

Une opération d'échange de lignes a les inconvénients suivants :

- × elle alourdit la procédure avec des opérations non nécessaires (les échanges de lignes). Cela peut provoquer des erreurs de report.
- × elle peut produire un système qui sera d'une plus grande complexité calculatoire. **Le choix optimal de pivot à une étape n'est pas forcément un choix optimal pour le reste de la procédure.**

On procédera donc à ces échanges de lignes avec parcimonie.

III.3.b) Les échanges de lignes obligatoires

Imaginons qu'on ait à résoudre le système suivant :

$$(S_2) \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 5y & - & 3z & + & 4w & = & 5 \\ 5x & + & 12y & - & 7z & + & 20w & = & 12 \\ x & + & 2y & - & 2z & + & 3w & = & 2 \end{array}\right.$$

Dans ce cas, le coefficient en x de la 1$^{\text{ère}}$ ligne est nul. Il est alors obligatoire d'échanger la ligne 1 avec une ligne possédant un pivot non nul. On choisit l'échange avec la ligne 3 qui permettra d'utiliser un pivot égal à 1.

$$(S_2) \quad \underset{}{\overset{L_1 \leftarrow L_3}{\Longleftrightarrow}} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & + & 3w & = & 2 \\ 5x & + & 12y & - & 7z & + & 20w & = & 12 \\ & & 5y & - & 3z & + & 4w & = & 5 \end{array}\right.$$

III.4. Nombre maximal d'opérations élémentaires

Théorème 6.

Soit (S) un système linéaire à n équations et p inconnues.

On suppose : $n \leqslant p$.

La résolution d'un système linéaire à n équations et p inconnues demande au maximum $n(n-1)$ opérations élémentaires

En particulier, la résolution d'un système linéaire à 3 équations et 3 inconnues (ou plus) demande au maximum 6 opérations élémentaires.

`À RETENIR`

On verra dans le chapitre suivant que la détermination de l'inverse d'une matrice peut se faire à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss.
Ce théorème stipule que :

- × l'inverse d'une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ s'obtient en 6 opérations élémentaires,
- × l'inverse d'une matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ s'obtient en 12 opérations élémentaires.

Démonstration.
On procède par disjonction de cas.

- Cas où $n = p$
  - × La grande étape $\boldsymbol{A}$ demande :
    - $n-1$ opérations pour la $1^{\text{ère}}$ colonne,
    - $n-2$ opérations pour la $2^{\text{ème}}$ colonne,
    - ...
    - $n-(n-1) = 1$ opération pour la $(n-1)^{\text{ème}}$ colonne.

    Soit en tout : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k = \dfrac{n(n-1)}{2}$ opérations élémentaires.
  - × La grande étape $\boldsymbol{B}$ ne demande pas d'opérations élémentaires (il s'agit de choisir et déplacer les variables auxiliaires à droite du symbole d'égalité).
  - × La grande étape $\boldsymbol{C}$ demande :
    - $n-1$ opérations pour la $n^{\text{ème}}$ colonne,
    - $n-2$ opérations pour la $(n-1)^{\text{ème}}$ colonne,
    - ...
    - 1 opération pour la $2^{\text{ème}}$ colonne.

    Soit en tout : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k = \dfrac{n(n-1)}{2}$ opérations élémentaires.

  Finalement, la résolution se fait donc au pire en :

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$$

  opérations élémentaires.

- Cas où $n < p$
  - × La grande étape $\boldsymbol{A}$ demande $\dfrac{n(n-1)}{2}$ opérations élémentaires. À l'issue de cette grande étape, on obtient un système échelonné.
  - × La grande étape $\boldsymbol{B}$ ne demande pas d'opération élémentaire. Les variables auxiliaires sont déplacées à droite du symbole d'égalité. On obtient alors un système triangulaire qui possède toujours n équations et au maximum n variables non auxiliaires.
  - × La grande étape $\boldsymbol{C}$ demande alors au pire $\dfrac{n(n-1)}{2}$ opérations élémentaires. □

III.5. Utilisation de fractions dans les opérations élémentaires

- Reprenons le système (S) qui nous a permis d'illustrer la méthode de résolution. La $1^{\text{ère}}$ opération élémentaire effectuée ($L_2 \leftarrow 2\,L_2 - 5\,L_1$) peut être remplacée par l'opération : $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{2}\,L_1$.

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x & + & 5\,y & - & 3\,z & + & 4\,w & = & 5 \\ 5\,x & + & 12\,y & - & 7\,z & + & 20\,w & = & 12 \\ x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{2}\,L_1}{\Longleftrightarrow}} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x & + & 5\,y & - & 3\,z & + & 4\,w & = & 5 \\ & - & \frac{1}{2}\,y & + & \frac{1}{2}\,z & + & 10\,w & = & -\frac{1}{2} \\ & - & y & - & z & + & 2\,w & = & -1 \end{array}\right.$$

En opérant ainsi, on fait apparaître des fractions dans le nouveau système. On augmente ainsi la difficulté calculatoire pour les opérations à venir.

À RETENIR

Les opérations faisant intervenir des fractions sont à proscrire.
Elles augmentent artificiellement la difficulté calculatoire de la procédure de résolution de système

- Évidemment, les opérations élémentaires utilisant des fractions dans le but de simplifier l'écriture d'une ligne peuvent être utilisées. On aurait par exemple pu ajouter l'opération suivante à la fin de l'étape ***A*** :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x & + & 5\,y & - & 3\,z & = & 5 & - & 4\,w \\ & - & y & + & z & = & -1 & - & 20\,w \\ & & & - & 2\,z & = & 0 & + & 18\,w \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x & + & 5\,y & - & 3\,z & = & 5 & - & 4\,w \\ & - & y & + & z & = & -1 & - & 20\,w \\ & & & & z & = & 0 & - & 9\,w \end{array}\right.$$

III.6. L'algorithme du pivot de Gauss (`(POLY)`)

A. **Mise sous forme échelonnée.**

`Pivot_Gauss_A(`S`)` :

1) Deux cas se présentent.
   - Soit la première colonne de (S) ne contient que des coefficients nuls. Dans ce cas, on passe directement à l'étape ***A3***.
   - Sinon, on note x l'inconnue la plus à gauche de (S).
     On choisit alors la première ligne L dont le coefficient a devant x est non nul. Quitte à effectuer une permutation $(L \leftrightarrow L_1)$, on place cette ligne en première position.
     (le coefficient a est appelé **pivot de Gauss** *de cette étape)*
2) On annule alors les coefficients devant x pour les autres lignes.
   Pour ce faire, on retire à L_i suffisamment de fois la ligne L_1 :
   $$L_i \leftarrow L_i + \alpha_i\, L_1 \quad (\text{pour tout } i \geqslant 2)$$
3) L_1 et C_1 (colonne 1) omis, on a ainsi créé un sous-système (S') possédant une ligne et une variable (une colonne) de moins.
4) - Si (S') ne contient plus aucune équation, on s'arrête.
   - Sinon, on recommence les différentes étapes de cet algorithme sur ce nouveau système (S') en réalisant l'appel : `Pivot_Gauss_A(`S'`)`.

B. **Mise sous forme triangulaire.**

`Pivot_Gauss_B(`S`)` :

À l'issue de cette étape ***A.*** on transfère, si besoin, les inconnues auxiliaires dans le membre de droite.
Le système obtenu est sous la forme triangulaire suivante.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{1,n}\,x_n & = & b_1 & - & a_{1,n+1}\,x_{n+1} & - & \dots & - & a_{1,p}\,x_p \\ & & a_{2,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{2,n}\,x_n & = & b_2 & - & a_{2,n+1}\,x_{n+1} & - & \dots & - & a_{2,p}\,x_p \\ & & & & & & a_{i,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{i,n}\,x_n & = & b_i & - & a_{i,n+1}\,x_{n+1} & - & \dots & - & a_{i,p}\,x_p \\ & & & & & & & & & & a_{n,n}\,x_n & = & b_n & - & a_{n,n+1}\,x_{n+1} & - & \dots & - & a_{n,p}\,x_p \end{array}\right.$$

On passe alors à l'étape de résolution.

C. **Mise sous forme diagonale du système obtenu.**

`Pivot_Gauss_C(`S`)` :

1) Deux cas se présentent.
   - Soit la dernière colonne de (S) ne contient que des coefficients nuls. Dans ce cas, on passe directement à l'étape ***C3***.
   - Sinon, on fixe la dernière ligne L_d du système.
     Notons z la variable présente dans cette ligne.
2) On annule alors les coefficients devant z pour les autres lignes.
   Pour ce faire, on retire à L_i suffisamment de fois la ligne L_d :
   $$L_i \leftarrow L_i + \alpha_i\, L \quad (\text{pour tout } i \leqslant d)$$
3) L_d et C_d (colonne d) omis, on a ainsi créé un sous-système (S') possédant une ligne et une variable (une colonne) de moins.
4) - Si (S') ne contient plus aucune équation, on s'arrête.
   - Sinon, on recommence les différentes étapes de cet algorithme sur ce nouveau système (S') en réalisant l'appel : `Pivot_Gauss_C(`S'`)`.

À l'issue de cette étape, tous les coefficients non diagonaux sont nuls.
On en déduit les solutions du système initial.

Remarque

- Pour programmer cet algorithme en **Python**, on programme tout d'abord les fonctions `Pivot_Gauss_A`, `Pivot_Gauss_B` et `Pivot_Gauss_C`. Ces trois fonctions prennent en paramètre un système linéaire et renvoie un système linéaire équivalent. La fonction finale s'écrit alors :

```python
# Algorithme du pivot de Gauss
def pivot_Gauss(S) :
    E = pivot_Gauss_A(S)
    T = pivot_Gauss_B(E)
    D = pivot_Gauss_B(T)
    return D
```

Un peu de culture informatique

- Dans l'étape *4)* de l'algorithme `Pivot_Gauss_A`, on réalise un appel à l'algorithme `Pivot_Gauss_A`. On est donc en train de définir `Pivot_Gauss_A` en fonction de lui-même ! On dit alors que l'on effectue une définition **récursive** de la fonction `Pivot_Gauss_A`.
- La terminaison de cet algorithme est assuré par le fait que les différents appels se font sur des systèmes possédant de moins en moins (strictement) d'équations. On aboutit donc forcément toujours à un sous-système qui ne possède plus d'équations, ce qui correspond au cas d'arrêt de l'algorithme.
- On aurait aussi pu choisir une autre présentation. En effet, comme on effectue successivement un travail sur chacune des colonnes du système linéaire, une boucle `for` est tout à fait envisageable pour cet algorithme.

IV. Généralités sur les matrices

Définition

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) un tableau de nombres.

Si A est une matrice, on note $a_{i,j}$ le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne. La matrice A s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

- On notera aussi $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$
- On dira aussi que A est de **taille** (ou dimension) $n \times p$.
- L'ensemble des matrices réelles de taille $n \times p$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Si $n = p$, on dira que la matrice A est une matrice **carrée**.
  On notera $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$.
  On parlera de matrice **rectangle** si $n \neq p$.
- Un élément de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est appelé **matrice ligne** ou **vecteur ligne**. Par exemple, la $i^{\text{ème}}$ ligne de A est un vecteur ligne. Il s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,p} \end{pmatrix}$$

- Un élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelé **matrice colonne** ou **vecteur colonne**. Par exemple, la $j^{\text{ème}}$ colonne de A est un vecteur colonne. Il s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

- La matrice (de taille $n \times p$) dont tous les coefficients sont nuls est appelée **matrice nulle**. Elle est notée $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ ou tout simplement 0.

> Même si la matrice nulle est notée 0, il ne faut pas la confondre avec le réel 0.

- Si $n = p$, on appelle **matrice identité** et on note I_n la matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls à l'exception des termes diagonaux qui sont égaux à 1. Plus précisément :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une **matrice scalaire** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\boxed{A = \lambda \cdot I_n}$.
- Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on appelle **matrice élémentaire** toute matrice $E_{i,j}$ définie par :

$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & & j^{\text{ème}} \text{ colonne} & & & \\ & & & & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Égalité de deux matrices
Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathscr{M}_{m,q}(\mathbb{K})$.
A et B sont **égales** si :

a) elles ont le même nombre de lignes : $n = m$.

b) elles ont le même nombre de colonnes : $p = q$.

c) elles ont les mêmes coefficients : $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!],\ a_{i,j} = b_{i,j}$.

V. Opérations matricielles

V.1. Somme de matrices

Définition
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle **somme** de A et B et on note $A + B$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$\boxed{A + B \ = \ (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}}$$

L'opérateur de somme matricielle $+$ est **interne** (dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) :

$$+ \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (\ A\ ,\ B\ ) & \mapsto & A + B \end{array} \right.$$

(partant de deux éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la somme associe un élément qui est lui aussi dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

Exemple

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & -7 \\ \mathrm{e}^2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{6} & 9 & 2 \\ 1 & -4 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{8} & 9 & -5 \\ \mathrm{e}^2 + 1 & -1 & -1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La somme de deux matrices correspond à la somme terme à terme des coefficients des deux matrices. L'opérateur matriciel « + » peut-être vu comme une extension de l'opérateur arithmétique « + ».

> Même si la notation est la même, attention à ne pas confondre ces deux opérateurs de somme. On ne peut sommer deux matrices que si elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.
>
> $$\cancel{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ e^2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}} \qquad \cancel{32 + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ e^2 & 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

Propriété

Soient A, B, C des matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors :

- $\boxed{A + B = B + A}$
  (l'opérateur + est commutatif)
- $\boxed{A + (B + C) = (A + B) + C}$
  (l'opérateur + est associatif)
- $\boxed{A + 0 = 0 + A = A}$
  (0 est l'élément neutre pour l'opérateur +)
- Notons $-A = (-a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$. Alors : $\boxed{A + (-A) = (-A) + A = 0}$
  (la matrice $-A$ est l'opposée de la matrice A pour l'opérateur +)

Proposition 1.

Tout matrice est combinaison linéaire de matrices élémentaires.

Démonstration.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors il existe $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathbb{K}^{n+p}$ tel que : $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$. Ainsi :

$$A = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \cdot E_{i,j} \right)$$

□

V.2. Produit d'une matrice par un scalaire

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On appelle **produit de A par le réel** λ la matrice $\lambda \cdot A$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$\boxed{\lambda \cdot A = (\lambda\ a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}}$$

L'opérateur de produit d'une matrice par un nombre réel $\cdot$ est **externe** :

$$\cdot \ : \left| \begin{array}{ccccc} \mathbb{K} & \times & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (\ \lambda & , & A\ ) & \mapsto & \lambda \cdot A \end{array} \right.$$

(les deux opérandes de l'opérateur $\cdot$ n'appartiennent pas au même ensemble)

Exemple

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ e^2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & -49 \\ 7\,e^2 & 21 & -7 \end{pmatrix}$$

Effectuer le produit d'une matrice par un réel correspond à effectuer, pour chaque coefficient, le produit (classique) par λ.

Propriété

Soit A et B des matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors :

- $\boxed{\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A}$
  (pseudo associativité : quels sont les opérateurs en jeu ?)
- $\boxed{1 \cdot A = A}$
  (pseudo élément neutre)
- $\boxed{\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B}$ $\quad$ $\boxed{(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot B}$
  (pseudo distributivité : quels sont les opérateurs en jeu ?)
- $\boxed{-1 \cdot A = -A}$

Remarque
Par la suite, on omettra souvent l'opérateur « $\cdot$ ».
On notera alors λA au lieu de $\lambda \cdot A$.

V.3. Produit de matrices

V.3.a) Définition

Définition

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

On appelle **produit de** A **et** B et on note $A \times B$ la matrice C ayant les propriétés suivantes :

1) $C = A \times B \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

2) $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, q]\!]$, $\boxed{c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\ b_{k,j}}$

Représentation graphique du produit matriciel
Le coefficient $c_{i,j}$ de la matrice produit est obtenu en effectuant le produit matriciel de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -13 & 8 & -5 & 0 \\ -16 & 12 & -7 & 12 \end{pmatrix} = C$$

⚠ Il faut faire particulièrement attention aux tailles des matrices que l'on souhaite multiplier.

Plus précisément, on peut résumer cette situation dans un tableau.

Taille de A	Taille de B	Taille de $A \times B$
n × p	p × q	n × q
1 × 2	2 × 7	1 × 7
3 × 2	2 × 1	3 × 1
3 × 5	5 × 3	3 × 3
2 × 3	2 × 3	**NON !**
4 × 4	4 × 4	4 × 4

On peut remarquer (on reviendra dessus plus tard) qu'il est toujours possible de multiplier des matrices carrées de même taille :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad \Rightarrow \quad A \times B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ et } B \times A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$$

V.3.b) Propriétés

Propriété

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

Soient $D \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $E \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors :

1) $\boxed{A \times (B \times C) = (A \times B) \times C}$

(pseudo associativité : combien d'opérateurs en jeu ?)

2) $\boxed{(A + D) \times B = A \times B + D \times B}$

(pseudo distributivité à droite : combien d'opérateurs en jeu ?)

3) $\boxed{A \times (B + E) = A \times B + A \times E}$

(pseudo distributivité à gauche : combien d'opérateurs en jeu ?)

4) $\boxed{A \times I_p = I_n \times A = A}$

(pseudo élément neutre)

5) $\boxed{A \times (\lambda \cdot B) = (\lambda \cdot A) \times B = \lambda \cdot (A \times B)}$

Propriété non vérifiées par $\times$

- En général, $\boxed{A \times B \neq B \times A}$

  Prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

  En effet, on a : $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

- En général, $\boxed{(A+B)^2 = (A+B) \times (A+B) \neq A^2 + 2 \cdot A \times B + B^2}$

  On peut prendre les deux matrices précédentes.

  En effet, on a : $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^2 + 2 \cdot A \times B + B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

- En général, $\boxed{A \times B = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0}$

  Prendre $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

- En général, $\boxed{A \times B = A \times C \not\Rightarrow B = C}$

  Prendre $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Proposition 2.

Soit $(i, j, k, \ell) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]^2 \times [\![1, q]\!]$.

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} \;=\; \delta_{j,k} \cdot E_{i,\ell}$$

où, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\delta_{i,j}$ *est appelé symbole de Kronecker et est défini par :*

$$\delta_{i,j} \;=\; \begin{cases} 1 & \textit{si } i = j \\ 0 & \textit{si } i \neq j \end{cases}$$

Remarque

- On remarque : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $(I_n)_{i,j} = \delta_{i,j}$.
- Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$:

  $$\forall (k, \ell) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \quad \left(E_{i,j}\right)_{k,\ell} \;=\; \delta_{i,k} \times \delta_{j,\ell} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } \ell = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Quelle est la matrice ayant pour coefficient, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$: $(\delta_{i,i})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$?

V.3.c) Interprétation des opérations élémentaires à l'aide du produit matriciel

Définition

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

On appelle **matrice de dilatation**, et on note $D_i(\lambda)$ la matrice suivante :

$$D_i(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & & & i^{\text{ème}} \text{ colonne} & & & \\ & & & & \downarrow & & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \lambda & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Proposition 3.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $B \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K})$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

1) *Effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda\, L_i$ sur la matrice A revient à effectuer l'opération :*

$$\boxed{D_i(\lambda) \times A}$$

2) *Effectuer l'opération élémentaire $C_i \leftarrow \lambda\, C_i$ sur la matrice B revient à effectuer l'opération :*

$$\boxed{B \times D_i(\lambda)}$$

Définition

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que : $i \neq j$. Soit $\mu \in \mathbb{K}$.

On appelle **matrice de transvection**, et on note $T_{i,j}(\mu)$ la matrice suivante :

$$T_{i,j}(\mu) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & & i & & & & j & & & & \\ & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \mu & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 & & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Proposition 4.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $B \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K})$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que : $i \neq j$. Soit $\mu \in \mathbb{K}$.

1) *Effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \mu\, L_j$ sur la matrice A revient à effectuer l'opération :*

$$\boxed{T_{i,j}(\mu) \times A}$$

2) *Effectuer l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + \mu\, C_j$ sur la matrice B revient à effectuer l'opération :*

$$\boxed{B \times T_{i,j}(\mu)}$$

Définition

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

On appelle **matrice de transposition**, et on note $\tau_{i,j}$ la matrice suivante :

$$\tau_{i,j} \ = \ \begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & i & & & & j & & & & \\
 & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & &
\end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & \vdots \\
\vdots & & & 0 & 1 & 0 & & 0 & & & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\
\vdots & & & 0 & & 0 & 1 & 0 & & & & \vdots \\
\vdots & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}$$

Proposition 5.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $B \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K})$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que : $i \neq j$.

1) *Effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ sur la matrice A revient à effectuer l'opération :*

$$\boxed{\tau_{i,j} \times A}$$

2) *Effectuer l'opération élémentaire $C_i \leftrightarrow C_j$ sur la matrice B revient à effectuer l'opération :*

$$\boxed{B \times \tau_{i,j}}$$

V.3.d) Le cas particulier des matrices carrées

(i) L'opérateur $\times$ est interne (dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$)

Lorsque l'on considère des matrices carrées ($n = p$), l'ensemble des propriétés énoncées précédemment reste évidemment valable. On peut de plus citer une particularité liée à ce cas. En effet, l'opérateur $\times$ est alors **interne** (dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) :

$$\boxed{\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \ \ A \times B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$$

(partant de deux éléments dans A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A \times B$ reste dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$)
Grâce à cette particularité, les pseudo-caractéristiques énoncées dans les propriétés précédentes deviennent des caractéristiques.

Propriété

Soient A, B, C, D, E des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors :

1) $\boxed{A \times (B \times C) = (A \times B) \times C}$
(l'opérateur $\times$ est associatif)

2) $\boxed{(A + D) \times B = A \times B + D \times B}$
(l'opérateur $\times$ est distributif à droite par rapport à l'opérateur $+$)

3) $\boxed{A \times (B + E) = A \times B + A \times E}$
(l'opérateur $\times$ est distributif à gauche par rapport à l'opérateur $+$)

4) $\boxed{A \times I_n = I_n \times A = A}$
(I_n est l'élément neutre pour l'opérateur $\times$)

5) $\boxed{A \times (\lambda \cdot B) = (\lambda \cdot A) \times B = \lambda \cdot (A \times B)}$

(ii) Matrices triangulaires et produit

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
On dit que la matrice A est :

- **triangulaire supérieure** si $\boxed{\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2,\ (i > j \ \Rightarrow\ a_{i,j} = 0)}$
- **triangulaire inférieure** si $\boxed{\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2,\ (i < j \ \Rightarrow\ a_{i,j} = 0)}$
- **diagonale** si $\boxed{\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2,\ (i \neq j \ \Rightarrow\ a_{i,j} = 0)}$

Ainsi, ces matrices pourront se présenter de la manière suivante :

$$\underset{\text{Triangulaires supérieures}}{\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{Triangulaires inférieures}}{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & \lambda_n \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{Diagonales}}{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}}$$

où $*$ est utilisé pour représenter des coefficients quelconques - pas forcément le même ! - (éventuellement nul) et $\lambda_i \in \mathbb{K}$ est utilisé pour représenter un coefficient diagonal (éventuellement nul).

Remarque

- Les matrices diagonales sont à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure (inversement, si une matrice est triangulaire supérieure et inférieure alors elle est diagonale).
- La matrice nulle 0 est diagonale.
- Les matrices I_n et λI_n sont diagonales.

Exemple

- Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont triangulaires supérieures.
- Les matrices $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ sont triangulaires inférieures.
- Les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ sont diagonales / triangulaires supérieures / triangulaires inférieures.
- Les matrices $\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont ni diagonale, ni triangulaire supérieure, ni triangulaire inférieure.

Théorème 7.

- *Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaires supérieures (resp. inférieures).*
- *Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.*

Démonstration.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 & * & \dots & * \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\beta_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2\beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\beta_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \lambda_2\beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & \lambda_n\beta_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\beta_n \end{pmatrix}$$

□

(iii) Puissance $m^{\text{ème}}$ d'une matrice carrée

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée et soit $m \in \mathbb{N}$.

- La puissance $m^{\text{ème}}$ de A, est la matrice : $A^m = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{m \text{ fois}}$.
- De manière rigoureuse, les puissances de A sont définies par la relation de récurrence :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} A^0 = I_n \\ \forall m \in \mathbb{N},\ A^{m+1} = A \times A^m \end{array}\right.}$$

Remarque

- Par convention : $(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})})^0 \ = \ I_n$.
- Si $m \neq 0$, $0^m = 0$ et $(I_n)^m = I_n$ et $(\lambda I_n)^m = \lambda^m I_n$
- De par les propriétés précédentes sur les matrices triangulaires, on a :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2^m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ldots & * & \lambda_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \ldots & 0 \\ * & \lambda_2^m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ldots & * & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, le produit $\times$ n'étant pas commutatif, il faut faire attention à l'élévation à la puissance m :

$$(A \times B)^m \ = \ (A \times B) \times \cdots \times (A \times B) \cancel{=} A^m \times B^m$$

Théorème 8.

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $m \in \mathbb{N}$.

Supposons de plus que A et B commutent : $AB = BA$.

Alors :

$$\boxed{(A+B)^m \ = \ \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k \times B^{m-k}}$$

$$\boxed{A^n - B^n \ = \ (A-B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k \times B^{n-1-k}}$$

Démonstration.

La démonstration est la même que pour la formule du binôme de Newton arithmétique. Il suffit de procéder par récurrence. □

V.4. Transposée d'une matrice

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- On appelle **transposée de** A, et on note A^T, la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\boxed{A^T \ = \ (a_{j,i})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}}$$

- L'opération de transposition consiste à échanger les lignes et les colonnes d'une matrice.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -7 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Propriété

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Soient $C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

1) $\boxed{(A+B)^T = A^T + B^T}$ ***2)*** $\boxed{(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T}$
(linéarité de l'application de transposition)

3) $\boxed{(A^T)^T = A}$
(idempotence de l'application de transposition)

4) $\boxed{(C \times D)^T = D^T \times C^T}$

Démonstration.

4) Notons $a'_{i,j}$ (resp. $b'_{i,j}$) le coefficient à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A^T (resp. B^T). Autrement dit : $a'_{i,j} = a_{j,i}$ et $b'_{i,j} = b_{j,i}$.

Notons maintenant $C = A \times B$ et $C' = B^T \times A^T$. On a alors :

$c'_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} b'_{i,k}\ a'_{k,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} b_{k,i}\ a_{j,k} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{j,k}\ b_{k,i} = c_{j,i}$ et donc $C' = {}^tC$. □

Proposition 6.

L'application $\cdot^T : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & A^T \end{array} \right.$ *est bijective.*

Démonstration.

<u>Caractère surjectif</u> : toute matrice $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ apparaît comme l'image par la fonction transposée d'une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
En effet, $M = (M^T)^T$ et $M^T \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

<u>Caractère injectif</u> : soient M et P dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Supposons : $M^T = P^T$. Si on note $m'_{i,j}$ les coefficients de M^T (et $p'_{i,j}$ ceux de P^T) alors on a :

$$\begin{array}{rccc} \forall i \in [\![1,p]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], & m'_{i,j} & = & p'_{i,j} \\ & \shortparallel & & \shortparallel \\ & m_{j,i} & & p_{j,i} \end{array}$$

ce qui revient à dire que $M = P$. □

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dira que la matrice A est **symétrique** si elle coïncide avec sa transposée, *i.e.* si $A^T = A$.
- Autrement dit :

$$\boxed{A \text{ est symétrique} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], \quad a_{i,j} = a_{j,i}}$$

- On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque

- Les seules matrices à la fois triangulaires supérieures (resp. inférieures) et symétriques sont les matrices diagonales.
- Seules les matrices carrées peuvent être symétriques.

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, sa transposée A^T est dans $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Ainsi, l'égalité $A = A^T$ n'est possible que si $n = p$. Autrement dit, les seules matrices pouvant être symétriques sont les matrices carrées.

Exemple

- Les matrices suivantes sont symétriques.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique.

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dira que la matrice A est **antisymétrique** si elle coïncide avec l'opposé de sa transposée, *i.e.* si $A^T = -A$.
- Autrement dit :

$$\boxed{A \text{ est symétrique} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,j} = -a_{j,i}}$$

- On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque

- Les seules matrices à la fois triangulaires supérieures (resp. inférieures) et symétriques sont les matrices diagonales.
- Seules les matrices carrées peuvent être antisymétriques.

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, sa transposée A^T est dans $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Ainsi, l'égalité $A = -A^T$ n'est possible que si $n = p$. Autrement dit, les seules matrices pouvant être antisymétriques sont les matrices carrées.

Exemple

- Les matrices suivantes sont antisymétriques.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas antisymétrique.

V.5. Calcul par blocs

Définition

Soit $(n_1, n_2, p_1, p_2) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^4$. On note :

$$n \;=\; n_1 + n_2 \qquad \text{et} \qquad p \;=\; p_1 + p_2$$

Soient $A_{1,1} \in \mathscr{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $A_{2,1} \in \mathscr{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$, $A_{1,2} \in \mathscr{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$ et $A_{2,2} \in \mathscr{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$.

On définit alors la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **par blocs** en posant :

$$\boxed{A \;=\; \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}}$$

Remarque

Inversement, on peut décomposer une matrice par blocs. Par exemple, la matrice :

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

se décompose par blocs à l'aide des matrices :

$$A_{1,1} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_{2,1} \;=\; \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad A_{1,2} \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_{2,2} \;=\; (9)$$

Proposition 7.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On décompose la matrice A par blocs. Pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$, il existe $(n_i, p_i) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ et $A_{i,j} \in \mathscr{M}_{n_i,p_i}(\mathbb{K})$ tels que $n_1 + n_2 = n$, $p_1 + p_2 = p$ et :

$$A \;=\; \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^T \;=\; \begin{pmatrix} A_{1,1}^T & A_{2,1}^T \\ A_{1,2}^T & A_{2,2}^T \end{pmatrix}}$$

Proposition 8.

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

On décompose A et B par blocs. Pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$, il existe $(n_i, p_i, q_i) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $A_{i,j} \in \mathscr{M}_{n_i,p_i}(\mathbb{K})$ et $B_{i,j} \in \mathscr{M}_{p_i,q_i}(\mathbb{K})$ tels que $n_1+n_2 = n$, $p_1+p_2 = p$, $q_1 + q_2 = q$ et :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A \times B = \begin{pmatrix} A_{1,1}\,B_{1,1} + A_{1,2}\,B_{2,1} & A_{1,1}\,B_{1,2} + A_{1,2}\,B_{2,2} \\ A_{2,1}\,B_{1,1} + A_{2,2}\,B_{2,1} & A_{2,1}\,B_{1,2} + A_{2,2}\,B_{2,2} \end{pmatrix}}$$

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la matrice $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} B & 0_{2,2} & 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & B & 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & B & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & \cdots & \cdots & \cdots & 0_{2,2} & \cdots & B \end{pmatrix}$$

où : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2.

VI. Les matrices inversibles

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- A est dite **inversible** si elle admet un inverse *i.e.* s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\boxed{A \times B = B \times A = I_n}$
- Si elle existe, la matrice B ainsi définie est unique. Elle est appelée **inverse de** A et est notée A^{-1}.
- On notera $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Seules les matrices carrées peuvent être inversibles.

Remarque

Même si le lien entre applications et matrices n'est pas l'objet de ce cours, il y a tout lieu de remarquer l'analogie entre la définition de l'inverse d'une matrice et celle de réciproque d'une application.

$$\begin{array}{ccccc} A & \times & B & = & I_n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ f & \circ & g & = & \mathrm{id}_{\mathrm{F}} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccccc} B & \times & A & = & I_n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ g & \circ & f & = & \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \end{array}$$

Exemple

- La matrice identité est inversible d'inverse elle-même : $I_n \times I_n = I_n$.
- Les matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls sont inversibles. En effet :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  et le produit commuté est aussi égal à la matrice identité.
- Les matrices triangulaires (supérieures et inférieures) à coefficients diagonaux tous non nuls sont inversibles (voir plus loin).

Théorème 9.

Soient A, B et P des matrices **inversibles** *de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

1) *A^{-1} est inversible. De plus :* $\boxed{(A^{-1})^{-1} \;=\; A}$

2) *A^T est inversible. De plus :* $\boxed{(A^T)^{-1} \;=\; (A^{-1})^T}$

3) *$A \times B$ est inversible. De plus :* $\boxed{(A \times B)^{-1} \;=\; B^{-1} \times A^{-1}}$

4) *Soit $m \in \mathbb{N}$. A^m est inversible. De plus :* $\boxed{(A^m)^{-1} \;=\; (A^{-1})^m}$

5) *$P^{-1}AP$ est inversible. De plus :* $\boxed{(P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P}$

Démonstration.

1) Par définition, $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$.

2) $(A^{-1})^T \times A^T = (A \times A^{-1})^T = I_n^T = I_n$
et $A^T \times (A^{-1})^T = (A^{-1} \times A)^T = I_n^T = I_n$.

3) $(A \times B) \times (B^{-1} \times A^{-1}) = (B^{-1} \times A^{-1}) \times (A \times B) = I_n$.

4) $A \times \ldots \times A \times A^{-1} \times \ldots A^{-1} = A^{-1} \times \ldots A^{-1} \times A \times \ldots \times A = I_n$. □

Propriété de simplification

Soient A, B, C dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Si $A \times C = B \times C$ et C inversible, alors $A = B$.

2) Si $C \times A = C \times B$ et C inversible, alors $A = B$.

3) Si $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $A \times B = 0$ alors A et B ne sont pas inversibles.

4) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec A inversible.
L'équation $AX = B$ admet alors une unique solution $X = A^{-1} \times B$.

Démonstration.
Il suffit de multiplier de part et d'autres de l'égalité par la matrice inverse. □

Théorème 10.

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Supposons que : $A \times B = I_n$.

Alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Démonstration.
Admis en première année. □

Remarque

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On utilise parfois le vocabulaire suivant.
  - × A admet une **inverse à gauche** si : $\exists B_1 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ B_1\ A = I_n$.
  - × A admet une **inverse à droite** si : $\exists B_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ A\ B_2 = I_n$.
- Par définition, une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui est à la fois inverse à gauche de A et inverse à droite de A.
- Le Théorème 10 signifie que si B est l'inverse à gauche de A, alors B est l'inverse de A.

Théorème 11.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $m \in \mathbb{N}$.

Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

1) $\boxed{(P^{-1} \times A \times P)^m \;=\; P^{-1} \times A^m \times P}$

2) $\boxed{(P \times A \times P^{-1})^m \;=\; P \times A^m \times P^{-1}}$

Démonstration.
On démontre par récurrence que les propriétés ***1)*** et ***2)*** sont vérifiées pour tout $m \in \mathbb{N}$. L'idée derrière l'étape d'hérédité est que :

$$\begin{aligned}
(P^{-1} \times A \times P)^{m+1} &= (P^{-1} \times A \times P) \times (P^{-1} \times A \times P)^m \\
&= (P^{-1} \times A \times P) \times (P^{-1} \times A^m \times P) \\
&= P^{-1} \times A \times (P \times P^{-1}) \times A^m \times P \\
&= P^{-1} \times A \times A^m \times P \;=\; P^{-1} \times A^{m+1} \times P
\end{aligned}$$

□

VII. Lien entre système linéaire et matrices

VII.1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition

Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, \dots, x_p$:

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}\ x_1 & + & a_{1,2}\ x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}\ x_p & = & b_1 & & L_1 \\ a_{2,1}\ x_1 & + & a_{2,2}\ x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}\ x_p & = & b_2 & & L_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1}\ x_1 & + & a_{n,2}\ x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}\ x_p & = & b_n & & L_n \end{array}\right.$$

- On appelle **matrice associée** au système linéaire (S), la matrice :

$$A_S = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

- Le système linéaire (S) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\boxed{A_S \times X = B}$$

  × $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est l'inconnue.

  × $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est le second membre.

- Résoudre (S) c'est résoudre cette équation d'inconnue X.

Remarque

- Si $n = p$, la matrice A_S associée au système (S) est une matrice carrée.
- Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système se traduisent sur la matrice associée au système.

VII.2. Systèmes compatibles

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Le système $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, est dit **compatible** si la matrice B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Exemple

- Le système $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est compatible.
- Le système $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas compatible.

Proposition 9.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $AX = B$.

On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions du système homogène associé au précédent : $AX = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

On note $X_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ une solution particulière du système $AX = B$.

Supposons que le système $AX = B$ est compatible.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathcal{S} & = & \{X_0 + Y \mid Y \in \mathcal{S}_H\} \\ & = & \{X_0 + Y \mid AY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \end{array}}$$

Démonstration.
À faire. □

VII.3. Inverse d'une matrice par résolution de système

VII.3.a) Caractérisation des systèmes de Cramer

Théorème 12.

Soit (S) un système linéaire à n équations et n inconnues.

Notons B le second membre de (S).

(S) est un système de Cramer	$\Leftrightarrow$	*(S) admet une unique solution quelque soit son second membre*

Démonstration.
($\Leftarrow$) Évident.

($\Rightarrow$) Supposons que (S) est un système de Cramer. D'après la caractérisation des systèmes de Cramer, l'algorithme du pivot de Gauss appliqué à (S) fait apparaître n pivots successifs non nuls. Cette procédure étant indépendante du second membre B, on en déduit qu'elle ferait apparaître aussi n pivots non nuls si on l'appliquait à (S) muni d'un autre second membre. □

Théorème 13.

Soit (S) un système linéaire à n équations et n inconnues.

Soit (S_H) le système homogène associé à (S).

(S) est un système de Cramer	$\Leftrightarrow$	*(S_H) est un système de Cramer*

Démonstration.
On a la chaîne d'équivalences suivante :

$$\begin{array}{rl} & (S_H) \text{ est un système de Cramer} \\ \Leftrightarrow & (S_H) \text{ admet une unique solution quelque soit son second membre} \\ \Leftrightarrow & (S) \text{ admet une unique solution quelque soit son second membre} \\ \Leftrightarrow & (S) \text{ est un système de Cramer} \end{array}$$

□

Remarque
Ces théorèmes signifient que le caractère unique de la solution d'un système carré (S) est indépendant de son second membre. Autrement dit, c'est une caractéristique intrinsèque à son premier membre : la matrice A_S.

Théorème 14.

Soit (S) un système linéaire à n équations et n inconnues.

Soit A_S la matrice associée à (S) ($A_S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$).

(S) est un système de Cramer	$\Leftrightarrow$	*A_S est une matrice inversible*

Démonstration.
($\Leftarrow$) Supposons A_S inversible. Résoudre le système (S) c'est trouver les solutions de l'équation $A_S \times X = B$ où B est le second membre de (S). Comme A_S est inversible, cette équation admet une unique solution $X = (A_S)^{-1} \times B$.

($\Rightarrow$) Supposons maintenant que (S) est de Cramer. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ notons $B_i \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls excepté le $i^{\text{ème}}$, égal à 1. Comme (S) est de Cramer, le système $A_S \times X = B_i$ admet une unique solution notée U_i. On obtient ainsi n égalités matricielles différentes que l'on peut résumer comme suit.

$$A_S \times (U_1\ U_2\ \dots\ U_n) = (B_1\ B_2\ \dots\ B_n)$$

Autrement dit, on a exhibé une matrice $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_S \times U = I_n$. Ceci permet de conclure que A_S est inversible, d'inverse U. □

Remarque
Dans le cas où (S) est de Cramer, l'unique solution de ce système est l'unique solution de l'équation : $A_S \times X = Y$. Cette solution est donc $X = (A_S)^{-1} \times Y$.

Théorème 15.

Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure).
Soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.

1)	*Une matrice triangulaire T est inversible*	$\Leftrightarrow$	*Les coefficients diagonaux de T sont tous non nuls*
2)	*Une matrice diagonale D est inversible*	$\Leftrightarrow$	*Les coefficients diagonaux de D sont tous non nuls*

Démonstration.

1) La matrice T est inversible si et seulement si le système $T \times X = Y$ est de Cramer. Or le système est de Cramer si et seulement si l'algorithme du pivot de Gauss fait apparaître successivement n pivots non nuls. Dans le cas d'un système déjà sous forme triangulaire, les pivots sont les coefficients diagonaux.

2) Même démonstration que ci-dessus. □

> Il faut bien lire le Théorème 15 : on parle de l'inversibilité d'une matrice **triangulaire**. Une matrice M quelconque dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls n'est pas forcément inversible.

Exemple

- La matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible.
- La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.
- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

VII.3.b) Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Inverse d'une matrice par inversion d'un système

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ et montrons qu'elle est inversible.

D'après le Théorème 14, la matrice A est inversible ssi le système linéaire $(S) : A \times X = Y$ est de Cramer. Inverser A consiste à inverser le système :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & y_1 \\ x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & = & y_2 \\ 4\,x_1 & + & 9\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & y_3 \end{array} \right.$$

Pour inverser (S) (*i.e.* exprimer chaque x_i en fonction des y_i), on applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & y_1 \\ & - & x_2 & - & x_3 & = & -y_1 + y_2 \\ & - & 7\,x_2 & - & 6\,x_3 & = & -4\,y_1 \qquad\quad y_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & y_1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & y_1 - y_2 \\ & & & & x_3 & = & 3\,y_1 - 7\,y_2 + y_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 4\,x_2 & & = -5\,y_1 + 14\,y_2 - 2\,y_3 \\ & & x_2 & & = -2\,y_1 + 6\,y_2 - y_3 \\ & & & x_3 & = 3\,y_1 - 7\,y_2 + y_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x_1 & & = 3\,y_1 - 10\,y_2 + 2\,y_3 \\ & x_2 & = -2\,y_1 + 6\,y_2 - y_3 \\ & \quad x_3 & = 3\,y_1 - 7\,y_2 + y_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & 2 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad X = U \times Y$$

Comme (S) est de Cramer, la matrice A est inversible.
Ainsi, la solution de (S) s'écrit $A^{-1}Y$. Or la solution de (S) est UY.
D'où : $A^{-1}Y = UY$ et comme ceci est vrai pour tout Y, on a : $\boxed{A^{-1} = U}$

Inverse d'une matrice par opérations sur les lignes de I_n

Cette technique consiste à se détacher de l'écriture des x_i et y_i et d'opérer sur les matrices plutôt que sur les systèmes.

Considérons de nouveau l'exemple précédent.

$$(S) : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Pour inverser (S) (*i.e.* exprimer chaque x_i en fonction des y_i), on applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{array}{rccccc}
(S) & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -5 & 14 & -2 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 3 & -10 & 2 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & I_3 \quad X & = & U \quad Y
\end{array}$$

Lorsque l'on souhaite utiliser cette écriture matricielle, on se débarrasse de l'écriture des vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On effectue les opérations élémentaires sur les lignes des deux matrices (séparées par une barre verticale) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

Théorème 16.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.

1) *Par une suite d'opérations élémentaires, on peut transformer A en la matrice I_n.*

2) *En effectuant ces opérations élémentaires (dans le même ordre !) sur I_n, on obtient la matrice A^{-1}.*

Démonstration.

- Initialement, on considère le système (S) donné par l'équation $A \times X = Y$. On peut l'écrire :
$$A \times X = I_n \times Y$$
- Par une suite d'opérations élémentaires, on a montré qu'on modifiait ce système en :
$$I_n \times X = U \times Y$$
- En fait, en opérant par opérations élémentaires, on a transformé la matrice A en la matrice I_n. En opérant ces mêmes opérations sur la matrice I_n, on la transforme en la matrice U, qui n'est autre que l'inverse de A.

$\square$

VII.3.c) Inverse d'une matrice carrée de taille 2×2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculons son inverse via la méthode précédente. Notons $D = ad - bc$ et supposons :

- $D = ad - bc \neq 0$
- $a \neq 0$ (dans un premier temps)

Résolvons le système (S) : $A \times X = Y$.

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccc} a\, x_1 & + & b\, x_2 & = & y_1 \\ c\, x_1 & + & d\, x_2 & = & y_2 \end{array} \right.$$

On applique alors l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{array}{rl}
(S) \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a\, x_1 + b\, x_2 = y_1 \\ \left(d - \frac{bc}{a}\right) x_2 = \frac{-c}{a} y_1 + y_2 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a\, x_1 = \left(1 - \frac{ab}{ad-bc}.\frac{-c}{a}\right) y_1 + \frac{-ab}{ad-bc} y_2 \\ \left(d - \frac{bc}{a}\right) x_2 = \frac{-c}{a} y_1 + y_2 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a\, x_1 = \frac{ad}{D} y_1 - \frac{ab}{D} y_2 \\ \frac{D}{a} x_2 = \frac{-c}{a} y_1 + y_2 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{d}{D} y_1 - \frac{b}{D} y_2 \\ x_2 = \frac{-c}{D} y_1 + \frac{a}{D} y_2 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & X = U \times Y
\end{array}$$

Ainsi, la matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = U$.

Dans le cas où $a = 0$, on opère de même et on trouve $A^{-1} = \frac{1}{D} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$

Théorème 17.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1) *Si $ad - bc = 0$, la matrice A n'est pas inversible.*

2) *Si $ad - bc \neq 0$, la matrice A inversible, d'inverse :*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Comment retenir cette formule :

- on échange les éléments diagonaux,
- on multiplie les autres par -1,
- et on n'oublie pas de diviser par $ad - bc$ (obtenu par « produit en croix »).

Remarque

La quantité $D = ad - bc$ est appelé **déterminant de** A. On la note habituellement det(A) ou $|A|$. Cette notion de déterminant est aussi définie pour des matrices $n \times n$ (mais nous ne le ferons pas cette année).

De manière générale :

$$\boxed{A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0}$$