CH I : Logique et structure du langage mathématiques

I. Préliminaire

On se base sur la notion intuitive :

- × d'*ensemble* (collection d'objets),
- × d'*appartenance* : « x appartient à E », « x est un élément de E ». On note : $x \in E$.
- × de *partie* ou *sous-ensemble* : l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B (on dit aussi que « B contient A ») si tout élément de A est élément de B.

Remarque

- La théorie des ensembles, créée par Georg Cantor à la fin du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, se donne seulement comme points de départ 2 des notions citées ci-dessus : ensemble et appartenance. Elle reconstruit, à partir de cela, tous les objets mathématiques usuels : fonctions, réels...
  Avec cette absence de contraintes, toute propriété peut définir un ensemble. Plus précisément, étant donné un ensemble A et une propriété $\mathcal{A}$, il affirme l'existence de $B = \{x \in A \mid \mathcal{A}(x)\}$: l'ensemble des éléments de A vérifiant la propriété $\mathcal{A}$.
- Ainsi, en notant Ω l'ensemble qui contient tous les ensembles, on peut définir l'ensemble : $B = \{x \in \Omega \mid x \notin x\}$. Mais alors 2 cas se présentent :
  - × si $B \in B$, alors, par définition de B : $B \notin B$.
    Absurde.
  - × si $B \notin B$, alors, toujours par définition de B : $B \in B$.
    Absurde.

  Ce paradoxe, dû à Bertrand Russel, démontre que l'ensemble B ci-dessus :
  - × ne peut exister (sinon on aboutit à une absurdité),
  - × existe car sa création est permise par la théorie des ensembles.

  On illustre sur cet exemple que la théorie des ensembles permet de démontrer à la fois un énoncé et sa négation. On dit que la théorie des ensembles est *contradictoire*.
- À cause de cela, à partir du $XX^{\text{ème}}$ siècle les mathématiciens ont cherché d'autres axiomatiques à cette théorie des ensembles. On citera notamment le mathématicien Ernst Zermelo qui construit en 1908 un système d'axiomes pour la théorie des ensembles qui, pour simplifier, peut être vu comme une restriction de la version contradictoire aux cas particuliers utiles (ce qui permet d'éviter les paradoxes). C'est encore à l'heure actuelle l'un des systèmes d'axiomes les plus utilisés en théorie des ensembles.

II. Propositions (ou assertions, énoncés...)

Définition (Proposition)
On appelle *proposition* un énoncé auquel on peut attribuer une valeur de vérité (vrai ou faux).

Exemples

- Les énoncés suivants sont des propositions mathématiques.

  a) $1 + 1 = 2$
  Cette proposition est vraie.

  b) $1 + 1 = 3$
  Cette proposition est fausse.

  c) $\ln(1) = 1$
  Cette proposition est fausse.
- Par contre, $1 + 1 - 2$ et $(\sqrt{18})^3$ ne sont pas des propositions puisqu'on ne peut leur attribuer de valeur de vérité. Ce sont des expressions arithmétiques dont le résultat est un réel.

Définition (Prédicat)
On appelle *prédicat* (ou fonction booléenne, ou propriété) un énoncé comportant des variables, et dont la valeur de vérité dépend du choix de ces variables.

Exemples

- Les énoncés suivants sont des propositions dont la valeur de vérité dépend du choix des variables.
  a) $x+2 \geqslant 4$
  - × cette proposition est vraie pour tout x plus grand que 2,
  - × cette proposition est fausse sinon *i.e.* pour tout x strictement inférieur à 2.

  b) $\sqrt{x^2} = x$
  - × cette proposition est vraie pour tout x plus grand que 0,
  - × cette proposition est fausse sinon *i.e.* pour tout x strictement inférieur à 0.

  c) $\sqrt{x^2+y^2} = x+y$
  Pour connaître la valeur de vérité cette proposition, on aimerait la simplifier, en commençant par se débarrasser de l'opérateur $\sqrt{\cdot}$.
  Une telle démarche est périlleuse : si on reprend la proposition précédente : $\sqrt{x^2} = x$, une élévation au carré de part et d'autre du symbole d'égalité fournit l'expression : $x^2 = x^2$, qui est vraie pour tout x réel !
  L'élévation au carré n'est donc pas un opérateur neutre en terme de valeur de vérité (nous reviendrons plus tard sur ce point).
  Sans entrer dans les détails, on peut remarquer que :
  - × si $x = 0$, la proposition est vraie pour tout $y \geqslant 0$,
  - × si $y = 0$, la proposition est vraie pour tout $x \geqslant 0$,
  - × si $x < 0$ et $y < 0$, la proposition est fausse.
- Par contre, $10^x - (\sqrt{y})$ n'est pas une proposition. C'est une expression arithmétique dont le résultat est un réel.

Commentaire

On peut nommer une proposition. Si elle dépend d'une variable explicitement donnée, on fera apparaître cette dépendance. Par exemple, on pourra noter $p(x,y)$ la proposition $\sqrt{x^2+y^2} = x+y$.

Commentaire

- Si E est un ensemble et si $\mathcal{A}$ est une propriété (ou prédicat) définie sur E (soit $x \in E$, $\mathcal{A}(x)$ est vraie ou $\mathcal{A}(x)$ est fausse), alors, à la propriété $\mathcal{A}$, on peut associer l'ensemble $A = \{x \in E \mid \mathcal{A}(x)\}$.
- Par exemple : $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant x\}$.
- $\mathcal{A}$ est une propriété caractéristique de l'ensemble A.

Exemples

Quelques exemples d'ensembles :

- $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\} = [0,1]$
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $[\![1, p]\!] = \{1, 2, 3, \ldots, p\}$
- $\mathbb{U} = \left\{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\right\}$

III. Connecteurs logiques

III.1. Conjonction

Définition *Conjonction*

Soient p et q deux propositions mathématiques.

- On note p `ET` q (ou $p \wedge q$) la proposition qui est :
  - × vraie quand p et q sont simultanément vraies,
  - × fausse sinon.
    Autrement dit, une conjonction p `ET` q est fausse si (au moins) l'une des deux propositions p ou q qui la compose est fausse.
- L'opérateur `ET` permet de combiner deux propositions pour former une nouvelle proposition.

Exemple
Les énoncés suivants sont des propositions mathématiques.

a) $(x+2 \geqslant 4)$ `ET` $(1+1=3)$
La proposition $1+1=3$ étant fausse indépendamment de la valeur de x, cette conjonction est fausse pour tout x réel.

b) $(1+1=2)$ `ET` $(x+2 \geqslant 4)$
- × cette proposition est vraie pour tout $x \geqslant 2$,
- × cette proposition est fausse sinon *i.e.* pour tout $x < 2$.

Remarque
Soient p et q deux propositions.
On peut résumer les valeurs de vérité de p `ET` q par une *table de vérité*.

p	q	p `ET` q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

III.2. Disjonction

Définition *Disjonction*
Soient p et q deux propositions mathématiques.

- On note p `OU` q (ou $p \vee q$) la proposition qui est :
  - × fausse quand p et q sont simultanément fausses,
  - × vraie sinon.
    Autrement dit, une disjonction p `OU` q est vraie si (au moins) l'une des deux propositions p ou q qui la compose est vraie.
- L'opérateur `OU` permet de combiner deux propositions pour former une nouvelle proposition.

Exemple
Les énoncés suivants sont des propositions mathématiques.

a) $(x+2 \geqslant 4)$ `OU` $(1+1=3)$
La proposition $1+1=3$ étant fausse indépendamment de la valeur de x, cette disjonction est :
- × vraie lorsque $(x+2 \geqslant 4)$ l'est *i.e.* pour tout $x \geqslant 2$,
- × fausse sinon *i.e.* pour tout $x < 2$.

b) $(1+1=2)$ `OU` $(x+2 \geqslant 4)$
La proposition $1+1=2$ étant vraie indépendamment de la valeur de x, cette disjonction est vraie pour tout x réel.

Commentaire

Il ne faut pas confondre cette définition du `OU` avec celle utilisée dans le langage naturel. En effet, lorsqu'on vous demande au restaurant si vous souhaitez du fromage ou du dessert, le serveur retire implicitement la possibilité de vous apporter les deux. Le « ou » du langage naturel correspond en fait au `XOR` (« ou » exclusif). Pour p et q deux propositions, p `XOR` q est vérifiée si seulement l'une des deux propositions p et q est vraie et fausse sinon.

Remarque
Soient p et q deux propositions.
On peut résumer les valeurs de vérité de p `OU` q par une *table de vérité*.

p	q	p `OU` q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Propriété des opérateurs ET et OU

1) <u>Distributivité de ET sur OU</u> : p ET (q OU r) a même valeur de vérité que (p ET q) OU (p ET r)

2) <u>Distributivité de OU sur ET</u> p OU (q ET r) a même valeur de vérité que (p OU q) ET (p OU r)

(dire que deux propositions a et b ont même valeur de vérité signifie qu'elles sont fausses en même temps et qu'elles sont vraies en même temps)

Démonstration.
Nous traitons seulement le ***1)***, le ***2)*** est laissé en exercice.
Pour montrer que deux propositions a et b ont même valeur de vérité, nous allons procéder comme suit :

- ***(i)*** nous montrons que si a est vraie alors b l'est aussi.
- ***(ii)*** nous montrons que si a est fausse alors b l'est aussi.

Ceci démontre que les propositions sont vraies en même temps et fausses en même temps.
Revenons à la démonstration consistant à démontrer que p ET (q OU r) a même valeur de vérité que (p ET q) OU (p ET r).

(i) Supposons que p ET (q OU r) est vraie.
Ceci signifie que les propositions p et q OU r sont vraies toutes les deux.
Ainsi, l'une (au moins) des propositions q ou r est vraie.
On procède alors par disjonction de cas sur la valeur de vérité (par exemple) de q.

× <u>si q est vraie</u> : alors p ET q est vraie.
Ainsi, la proposition (p ET q) OU (p ET r) est vraie.

× <u>si q est fausse</u> : alors comme q OU r est vraie, r est forcément vraie.
On en déduit que p ET r est vraie.
Ainsi, la proposition (p ET q) OU (p ET r) est vraie.

La proposition (p ET q) OU (p ET r) est donc vraie (puisque vraie indépendamment de la valeur de q).

(ii) Supposons que p ET (q OU r) est fausse.
Ceci signifie que l'une (au moins) des propositions p ou q OU r est fausse.
On procède alors par disjonction de cas sur la valeur de vérité (par exemple) de p.

× <u>si p est vraie</u> : alors q OU r est fausse. Ainsi, q et r sont fausses.
On en déduit que p ET q et p ET r sont fausses.
Ainsi, la proposition (p ET q) OU (p ET r) est fausse.

× <u>si p est fausse</u> : alors p ET q est fausse et p ET r est fausse.
Ainsi, la proposition (p ET q) OU (p ET r) est fausse.

La proposition (p ET q) OU (p ET r) est donc fausse (puisque fausse indépendamment de la valeur de p). □

Commentaire

- Notez que ***(i)*** et ***(ii)*** permettent d'affirmer que :
  - ***(ii')*** si b est vraie alors a est vraie.
  Si on suppose b vraie, alors, si a était fausse, à l'aide de ***(ii)*** on pourrait conclure que b est fausse, ce qui contredit l'hypothèse « b est vraie ».
  - ***(i')*** si a est fausse alors b est fausse.
  Si on suppose a fausse, alors, si b était vraie, à l'aide de ***(i)*** on pourrait conclure que b est vraie, ce qui contredit l'hypothèse « a est fausse ».
- Réciproquement, en raisonnant de même, on peut prouver que ***(ii')*** permet de démontrer ***(ii)*** et ***(i')*** permet de démontrer ***(i)***.
- On en conclut que l'on peut remplacer ***(i)*** par ***(i')*** et ***(ii)*** par ***(ii')*** lorsque l'on souhaite démontrer que deux propositions ont même valeur de vérité.

III.3. Négation

Définition *Négation*

Soit p une proposition mathématique.

- On note $\texttt{NON}(p)$ la proposition qui est :
  - × vraie lorsque p est fausse,
  - × fausse lorsque que p est vraie.

Exemple

a) $\texttt{NON}(x+2 \geqslant 4)$ est une proposition qui est :

× vraie si $x+2 \geqslant 4$ est fausse *i.e.* si pour tout x tel que $x+2 < 4$,

× fausse si $x+2 \geqslant 4$ est vraie *i.e.* si pour tout x tel que $x+2 \geqslant 4$.

En fait, $\texttt{NON}(x+2 \geqslant 4)$ a même valeur de vérité que $(x+2 < 4)$.

b) De même, $\texttt{NON}(\sqrt{x^2} = x)$ a même valeur de vérité que $(\sqrt{x^2} \neq x)$.

Remarque
Soit p une proposition.
On peut résumer les valeurs de vérité de $\texttt{NON}(p)$ par une *table de vérité*.

p	$\texttt{NON}(p)$
V	F
F	V

Propriété de la négation

1) $\texttt{NON}(p \texttt{ ET } q)$ a même valeur de vérité que $(\texttt{NON}(p) \texttt{ OU } \texttt{NON}(q))$.

2) $\texttt{NON}(p \texttt{ OU } q)$ a même valeur de vérité que $(\texttt{NON}(p) \texttt{ ET } \texttt{NON}(q))$.

3) $\texttt{NON}(\texttt{NON}(p))$ a même valeur de vérité que p.

Les énoncés ***1)*** et ***2)*** sont appelées lois de De Morgan.

Démonstration.

1) (i) Supposons que $\texttt{NON}(p \texttt{ ET } q)$ est vraie.
Alors $p \texttt{ ET } q$ est fausse. Ainsi, l'une (au moins) des deux propositions p ou q est fausse.
On procède alors par disjonction de cas sur la valeur de vérité (par exemple) de p.

× si p est vraie : alors q est fausse.
On en déduit que $\texttt{NON}(q)$ est vraie.
Ainsi, la proposition $(\texttt{NON}(p) \texttt{ OU } \texttt{NON}(q))$ est vraie.

× si p est fausse : alors $\texttt{NON}(p)$ est vraie.
Ainsi, la proposition $(\texttt{NON}(p) \texttt{ OU } \texttt{NON}(q))$ est vraie.

La proposition $(\texttt{NON}(p) \texttt{ OU } \texttt{NON}(q))$ est donc vraie (puisque vraie indépendamment de la valeur de vérité de p.

(ii) Supposons que $\texttt{NON}(p \texttt{ ET } q)$ est fausse.
Alors $p \texttt{ ET } q$ est vraie. Ainsi, les deux propositions p et q sont vraies.
On en déduit que $\texttt{NON}(p)$ et $\texttt{NON}(q)$ sont fausses toutes les deux.
Ainsi, la proposition $(\texttt{NON}(p) \texttt{ OU } \texttt{NON}(q))$ est fausse.

2) Laissé en exerice.

3) (i) Si $\texttt{NON}(\texttt{NON}(p))$ est vraie alors $\texttt{NON}(p)$ est fausse et donc p est vraie.

(ii) Si $\texttt{NON}(\texttt{NON}(p))$ est fausse alors $\texttt{NON}(p)$ est vraie et donc p est fausse.

□

III.4. Implication

III.4.a) Définition et schéma de démonstration

Définition *Implication*

Soient p et q deux propositions mathématiques.

- On note $p \Rightarrow q$ la proposition qui est :
  - × vraie si q est vraie à chaque fois que p l'est,
  - × fausse sinon.
- Lorsque la proposition $p \Rightarrow q$ est vraie, on dira que p *implique* q (la proposition p entraîne la proposition q).
- L'implication $q \Rightarrow p$ est appelée **réciproque** de l'implication $p \Rightarrow q$.
- Lorsque p implique q, on dira que :
  - × p est une **condition suffisante** de q : en effet, pour que la proposition q soit vraie, il suffit que p le soit.
  - × q est une **condition nécessaire** de p : en effet, pour que p soit vraie, il est nécessaire que q le soit.
    (si q n'est pas vraie alors p ne peut être vraie : sinon, comme $p \Rightarrow q$, la proposition q serait vraie !)

Remarque
Soient p et q deux propositions.
On peut résumer les valeurs de vérité de $p \Rightarrow q$ par une table de vérité.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Schéma de démonstration

Pour montrer $a \Rightarrow b$, on peut opter pour la démonstration directe. Ceci consiste à montrer que b est vraie dès que a l'est. On rédigera comme suit.

Démo de $a \Rightarrow b$ par méthode directe

```
Supposons a.
Alors ...(démo dépendant de a) ...et donc b.
Ce qui démontre a ⇒ b.
```

Application sur un exemple

Propriété *Transitivité de l'implication*

Soient p, q et r des propositions mathématiques.

$$\boxed{((p \Rightarrow q) \texttt{ ET } (q \Rightarrow r)) \ \Rightarrow \ (p \Rightarrow r)}$$

Cet énoncé se lit : **si** p implique q et q implique r **alors** p implique r.

Démonstration.
Si on reprend le schéma de démonstration précédent, le rôle de a est ici joué par $(p \Rightarrow q)$ `ET` $(q \Rightarrow r)$ et le rôle de b est joué par $p \Rightarrow r$.

- Supposons : $(p \Rightarrow q)$ `ET` $(q \Rightarrow r)$.

  Démontrons alors : $p \Rightarrow r$.

  Supposons p.
  Comme $(p \Rightarrow q)$ `ET` $(q \Rightarrow r)$, alors $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow r$.
  - × comme p est vraie et $p \Rightarrow q$, la proposition q est vraie,
  - × comme q est vraie et $q \Rightarrow r$, la proposition r est vraie.

  Ce qui démontre $p \Rightarrow q$ et termine la démonstration.

□

Commentaire

- Mettons en avant deux éléments de la définition :
  - × si l'on sait que p implique q et que p est vraie, alors on a forcément q.
  - × si l'on sait que p implique q et que p est fausse, il faut bien comprendre que la définition n'impose rien quand à la valeur de vérité de q.
- Pour bien comprendre ce mécanisme, étudions l'énoncé suivant :
  « **s'il** fait beau **alors** j'irai au parc »
  Deux cas se présentent :
  - × soit il fait beau et je me dois d'aller au parc.
  - × soit il ne fait pas beau. Dans ce cas, j'ai le choix. Soit je décide malgré tout d'aller au parc (avec mon parapluie), soit je décide de rester chez moi : cela ne remet pas en cause la véracité de l'énoncé précédent.
- À retenir : p implique q correspond à l'énoncé « **si** p **alors** q ».

III.4.b) Contraposée et schéma de démonstration associé

Propriété *Contraposée*

Soient p et q deux propositions mathématiques.

- Les propositions $p \Rightarrow q$ et $\texttt{NON}(q) \Rightarrow \texttt{NON}(p)$ ont même valeur de vérité.
- La proposition $\texttt{NON}(q) \Rightarrow \texttt{NON}(p)$ est appelée **contraposée** de $p \Rightarrow q$.

⚠

Soient p et q deux propositions.
Il ne faut surtout pas confondre les propositions :

- $q \Rightarrow p$: la proposition réciproque de $p \Rightarrow q$.
- $\texttt{NON}(q) \Rightarrow \texttt{NON}(p)$: la proposition contraposée de $p \Rightarrow q$.

Schéma de démonstration

Démontrer $a \Rightarrow b$ par contraposée consiste à démontrer que la proposition (équivalente)
$\texttt{NON}(b) \Rightarrow \texttt{NON}(a)$ est vraie.

Démo de $a \Rightarrow b$ par contraposée

```
Supposons NON(b).
Alors ...(démo dépendant de b) ...et donc NON(a).
Ce qui démontre a ⇒ b.
```

Exercice 1
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par contraposée que si n^2 est pair alors n est pair.

Démonstration.
Supposons : $\texttt{NON}(n$ est pair$)$. Alors n est impair.
Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2p + 1$. On obtient :

$$n^2 \;=\; (2p+1)^2 \;=\; 4p^2 + 2p + 1 \;=\; 2\,(2p^2 + p) + 1$$

Ainsi, en posant $k = 2p^2 + p \in \mathbb{N}$, on a : $n^2 = 2k + 1$. On en déduit que n est impair.
On a donc démontré : $\texttt{NON}(n$ est pair$) \;\Rightarrow\; \texttt{NON}(n^2$ est pair$)$. On en déduit que si n^2 est pair, alors n est pair. □

Exercice 2
Pour x élément de $\mathbb{R}$, montrer que : $((\forall \varepsilon > 0), x \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x \leqslant 0$.
On procédera par contraposée.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Supposons : $\texttt{NON}(x \leqslant 0)$. Alors : $x > 0$.
Démontrons : $\texttt{NON}(\forall \varepsilon > 0,\ x \leqslant \varepsilon)$, *i.e.* $\exists \varepsilon_0 > 0,\ x > \varepsilon_0$.
Posons : $\varepsilon_0 = \dfrac{x}{2}$. Alors : $\varepsilon_0 > 0$ et $x > \varepsilon_0$.
On a donc démontré : $\texttt{NON}(x \leqslant 0) \Rightarrow \texttt{NON}(\forall \varepsilon > 0,\ x \leqslant \varepsilon)$. Ainsi : $((\forall \varepsilon > 0), x \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x \leqslant 0$. □

Intérêt de la démonstration par contraposée
Pour démontrer $p \Rightarrow q$, il est parfois utile de partir d'une hypothèse sur q (supposer $\texttt{NON}(q)$ en l'occurrence) pour démontrer un but dépendant de p (montrer $\texttt{NON}(p)$). C'est ce que permet le raisonnement par contraposée.

III.4.c) Expression de $p \Rightarrow q$ à l'aide des opérateurs NON et OU

Propriété

Soient p et q deux propositions mathématiques.

La proposition $p \Rightarrow q$ a même valeur de vérité que la proposition $\texttt{NON}(p)$ $\texttt{OU}$ q.

Démonstration.
Pour démontrer que ces deux propositions ont même valeur de vérité, nous montrons les points ***(i)*** et ***(ii')***.

(i) Supposons : $p \Rightarrow q$.
Procédons par disjonction de cas sur la valeur de vérité de p.

× supposons p : alors, comme $p \Rightarrow q$, on en déduit q.
Ainsi, $\texttt{NON}(p)$ $\texttt{OU}$ q.

× si p est fausse : alors $\texttt{NON}(p)$ est vraie. Ainsi, $\texttt{NON}(p)$ $\texttt{OU}$ q est vraie.

(ii') Supposons : $\texttt{NON}(p)$ $\texttt{OU}$ q.
Démontrons alors : $p \Rightarrow q$.

Supposons p.
Alors $\texttt{NON}(p)$ est fausse.
Comme $\texttt{NON}(p)$ $\texttt{OU}$ q est vraie, on peut donc conclure que q est vraie.

On a donc démontré : $p \Rightarrow q$. □

Remarque
Soit p et q deux propositions.
Le résultat précédent s'illustre par des tables de vérité.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\texttt{NON}(p)$	$\texttt{NON}(p)$ $\texttt{OU}$ q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Application : négation de $p \Rightarrow q$

Propriété

Soient p et q deux propositions mathématiques.

- La proposition $\texttt{NON}(p \Rightarrow q)$ a même valeur de vérité que la proposition p $\texttt{ET}$ $\texttt{NON}(q)$.

Démonstration.
La proposition $\texttt{NON}(p \Rightarrow q)$ a même valeur de vérité que $\texttt{NON}(\texttt{NON}(p)\ \texttt{OU}\ q)$.
De plus, $\texttt{NON}(\texttt{NON}(p)\ \texttt{OU}\ q)$ a même valeur de vérité que p $\texttt{ET}$ $\texttt{NON}(q)$. □

Exercice 3
On considère la proposition « s'il pleut, mon jardin est mouillé ».
Quelle est sa négation ?

a. « s'il ne pleut pas, mon jardin n'est pas mouillé »

b. « s'il ne pleut pas, mon jardin est mouillé »

c. « s'il pleut, mon jardin n'est pas mouillé »

d. « si mon jardin n'est pas mouillé, il ne pleut pas »

e. « il pleut et mon jardin n'est pas mouillé »

f. autre réponse.

III.5. L'opérateur d'équivalence

III.5.a) Définition et schéma de démonstration

Définition *Équivalence*

Soient p et q deux propositions mathématiques.

- On note $p \Leftrightarrow q$ la proposition qui est :
  - × vraie si $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$ sont vraies,
  - × fausse sinon.
- Lorsque $p \Leftrightarrow q$ est vraie, on dira que p est **équivalent** q.

Remarque

- Lorsque p est équivalent à q on a :
  - × p implique q donc p est une condition suffisante de q.
    (q est une condition nécessaire de p)
  - × q implique p donc p est une condition nécessaire de q.
    (q est une condition suffisante de p)

  On dira donc que p est une **condition nécessaire et suffisante** de q
  (q est une condition nécessaire et suffisante de p)
  ou encore que p est vraie **si et seulement si** q est vraie.
- Dire que p est équivalent à q revient à dire que p et q ont même valeur de vérité. En effet :
  - × le point ***(i)*** revient à démontrer $p \Rightarrow q$,
  - × le point ***(ii')*** revient à démontrer $q \Rightarrow p$.

Remarque
Soit p et q deux propositions.
On peut résumer les valeurs de vérité de $p \Leftrightarrow q$ par une table de vérité.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemples précédents

Soient p, q et r des propositions mathématiques.

1) $\boxed{p \texttt{ ET } (q \texttt{ OU } r) \;\Leftrightarrow\; (p \texttt{ ET } q) \texttt{ OU } (p \texttt{ ET } r)}$

2) $\boxed{p \texttt{ OU } (q \texttt{ ET } r) \;\Leftrightarrow\; (p \texttt{ OU } q) \texttt{ ET } (p \texttt{ OU } r)}$

3) $\boxed{\texttt{NON}(p \texttt{ ET } q) \;\Leftrightarrow\; \texttt{NON}(p) \texttt{ OU } \texttt{NON}(q)}$

4) $\boxed{\texttt{NON}(p \texttt{ OU } q) \;\Leftrightarrow\; \texttt{NON}(p) \texttt{ ET } \texttt{NON}(q)}$

5) $\boxed{\texttt{NON}(\texttt{NON}(p)) \;\Leftrightarrow\; p}$

Schéma de démonstration

Démontrer que $a \Leftrightarrow b$ consiste à démontrer tout d'abord que $a \Rightarrow b$ *i.e.* que a est une condition suffisante de b (sens direct) puis que $b \Rightarrow a$ *i.e.* que a est une condition nécessaire de b (sens réciproque). On dit alors qu'on procède par **double implication**.

Démo de $a \Leftrightarrow b$ par double implication

(⇒) Supposons a.
On a alors ...*(démo dépendant de a)* ...et donc b.
Ce qui démontre $a \Rightarrow b$.

(⇐) Supposons b.
On a alors ...*(démo dépendant de b)* ...et donc a.
Ce qui démontre $b \Rightarrow a$.

Et ainsi, $a \Leftrightarrow b$.

III.5.b) Négation d'une équivalence

- La propostion NON($p \Leftrightarrow q$) est équivalente à NON($p \Rightarrow q$ ET $q \Rightarrow p$), qui est elle-même équivalente à NON($p \Rightarrow q$) OU NON($q \Rightarrow p$).
- Ainsi, démontrer que $p \Leftrightarrow q$ n'est pas vérifié revient à démontrer que l'une (au moins) des deux implications $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$ n'est pas vérifiée.

IV. Quantificateurs

IV.1. Quantificateur universel

Définition *Quantificateur universel*
Soient E un ensemble, et p une proposition comportant une variable x.

- On note $\forall x \in E,\ p(x)$ la proposition qui est :
  - × vraie si pour tout élément x de l'ensemble E, $p(x)$ est vraie,
  - × fausse sinon.
    Autrement dit qui est fausse s'il existe au moins un élément x de l'ensemble E tel que la proposition $p(x)$ est fausse.
- Lorsque $(\forall x \in E,\ p(x))$ est vraie, on dit que quelque soit x élément E (ou pour tout élément x de E), $p(x)$ est vérifiée.

Schéma de démonstration

Pour démontrer un énoncé universellement quantifié *i.e.* un énoncé du type $(\forall x \in E,\ p(x))$, il faut rédiger comme suit.

Démo de $\forall x \in E,\ p(x)$

Soit $x \in E$.
Alors ...*(démo dépendant de p)* ...et donc $p(x)$ est vraie.
Ceci démontre que, pour tout x de E, $p(x)$ est vraie.

Exercice 4
Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

IV.2. Quantificateur existentiel

Définition *Quantificateur existentiel*
Soient E un ensemble, et p une proposition comportant une variable x.

- On note $\exists x \in E,\ p(x)$ la proposition qui est :
  - × vraie s'il existe au moins un élément x de l'ensemble E tel que la proposition $p(x)$ est vraie.
  - × fausse sinon.
    Autrement dit qui est fausse s'il n'existe aucun élément x de E tel que la proposition $p(x)$ est vraie.
- On note aussi $\exists! x \in E,\ p(x)$ la proposition qui est :
  - × vraie s'il existe **un unique** élément x de l'ensemble E tel que la proposition $p(x)$ est vraie.
  - × fausse sinon.
    Autrement dit qui est fausse :
    - soit s'il n'existe aucun élément x de E tel que $p(x)$ est vraie,
    - soit s'il existe (au moins) deux éléments de E qui satisfont p.

Schéma de démonstration

Démontrer un énoncé existentiellement quantifié *i.e.* un énoncé du type ($\exists x \in E, p(x)$) consiste à exhiber un élément a de E qui vérifie la proposition p. Autrement dit, un élément tel que $p(a)$ est vraie.

Exemple
Pour démontrer la proposition : $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 3$, il suffit d'exhiber un x réel tel que son carré vaut 3. On peut prendre par exemple $x = -\sqrt{3}$.
(on aurait pu prendre aussi $x = \sqrt{3}$)

IV.3. Énoncés comportant plusieurs quantificateurs

Commentaire

On peut écrire des énoncés comportant plus d'un quantificateur. Par exemple, l'énoncé : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$ signifie que tout élément réel x possède un opposé y. Notez que cet opposé y dépend de l'élément x initial.

⚠

- Les quantificateurs de types différents ne commutent pas en général. Par exemple, l'énoncé : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0$ n'est pas équivalent au précédent. Elle énonce l'existence d'un élément qui serait l'opposé de tout réel. Évidemment, cette proposition est fausse.
- Les quantificateurs de même type commutent.

Exercice 5
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Que signifient les deux propositions suivantes ?

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leqslant M$

2) $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$

Exercice 6
Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes définies sur $\mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels non nuls).

1) Tout entier est le carré d'un entier.

2) Tout entier a pour carré la somme des carrés de deux entiers.

3) Certains entiers ont pour carré la somme des carrés de deux entiers.

4) Aucun entier n'est plus grand que tous les autres.

Exprimer la négation de ces propositions.

IV.4. Négation d'énoncés comportant des quantificateurs

IV.4.a) Si la proposition contient un seul quantificateur

- La négation de $(\forall x \in E,\ p(x))$ a même valeur de vérité que la proposition : $(\exists x_0 \in E,\ \texttt{NON}(p(x_0)))$. Autrement dit :

$$\boxed{\texttt{NON}(\forall x \in E,\ p(x)) \ \Leftrightarrow\ \exists x_0 \in E,\ \texttt{NON}(p(x_0))}$$

Schéma de démonstration

Démontrer que la proposition $q : \forall x \in E,\ p(x)$ est fausse, c'est démontrer que $\texttt{NON}(q)$ est vraie. Or on a : $\texttt{NON}(q)\ :\ \exists x_0 \in E,\ \texttt{NON}(p(x_0))$. Ainsi, il s'agit d'exhiber un élément u de E tel que $p(u)$ est fausse. Cet élément u est appelé un **contre-exemple** de la proposition q.

Exercice 7
Démontrer que la proposition suivante est fausse.

$$\forall x \in \,]-\infty, 1[, \quad 2^{3^x}\,(\ln(1-x)+1)\,(3x^3 + xe^x - 4) \geqslant 0$$

Il s'agit d'exhiber un contre-exemple. Or on remarque que :
× $2^{3^0} = 2^1 = 2$
× $\ln(1-0)+1 = \ln(1)+1 = 1$
× $3 \times 0^3 + 0 \times e^0 - 4 = -4$
et $2 \times 1 \times (-4) < 0$. L'élément $u = 0$ fournit un contre-exemple.

- La négation de $(\exists x \in E,\ p(x))$ a même valeur de vérité que la proposition $(\forall x \in E,\ \texttt{NON}(p(x)))$. Autrement dit :

$$\boxed{\texttt{NON}(\exists x \in E,\ p(x)) \ \Leftrightarrow\ \forall x \in E,\ \texttt{NON}(p(x))}$$

- Ainsi, pour nier une proposition qui commence par un quantificateur, on change le quantificateur et on nie la proposition qui le suit.

IV.4.b) Si la proposition comporte plusieurs quantificateurs

Afin de nier une proposition comportant plusieurs quantificateurs, il suffit d'itérer la règle précédente.

Exemple
Soit p la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}^+, f(x) \leqslant M$.
Notons $q(x)$ la proposition : $\exists M \in \mathbb{R}^+, f(x) \leqslant M$. On a alors :

$$p \ :\quad (\forall x \in \mathbb{R}),\ q(x)$$

Donc, en appliquant la règle précédente :

$$\texttt{NON}(p) \ \Leftrightarrow\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \texttt{NON}(q(x_0))$$

et ainsi,

$$\texttt{NON}(p) \ \Leftrightarrow\ \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathbb{R}^+,\ f(x_0) > M$$

Exercice 8
Établir la négation de la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y))$$

On peut procéder de manière automatique :

$$\begin{aligned}
& \texttt{NON}(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y))) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \texttt{NON}(\forall y \in \mathbb{R},\ (x_0 \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x_0) \leqslant f(y))) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \exists y_0 \in \mathbb{R},\ \texttt{NON}(x_0 \leqslant y_0 \ \Rightarrow\ f(x_0) \leqslant f(y_0)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \exists y_0 \in \mathbb{R},\ (x_0 \leqslant y_0 \ \texttt{ET}\ \texttt{NON}(f(x_0) \leqslant f(y_0))) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \exists y_0 \in \mathbb{R},\ (x_0 \leqslant y_0)\ \texttt{ET}\ (f(x_0) > f(y_0))
\end{aligned}$$

(la proposition de départ signifie que la fonction f est croissante)

V. Autres types de démonstrations rencontrées

V.1. Démonstration par l'absurde

- Afin de démontrer une proposition r, on peut procéder par l'absurde. Ce raisonnement consiste à supposer que NON(v) est vraie, et montrer que cela mène à une contradiction.

Démo de v par l'absurde

```
On procède par l'absurde. Supposons NON(v).
Alors ...
Contradiction !
Ce qui démontre v.
```

- Ce type de raisonnement est adapté au cas ou la proposition v est une implication $v : a \Rightarrow b$. On rappelle que dans ce cas, NON(v) équivaut à NON(NON(a) OU b) *i.e.* à a ET NON(b). Pour montrer par l'absurde la proposition $a \Rightarrow b$, on rédigera comme suit.

Démo de $a \Rightarrow b$ par l'absurde

```
On procède par l'absurde. Supposons a et NON(b).
Alors ...
Contradiction !
Ce qui démontre a ⇒ b.
```

Exercice 9
Pour x élément de $\mathbb{R}$, démontrer : $((\forall \varepsilon > 0), x \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x \leqslant 0$.
On procédera par l'absurde.

Exercice 10
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par l'absurde que si n^2 est pair alors n est pair.

Intérêt de la démonstration par l'absurde
Lorsque l'on démontre une implication $a \Rightarrow b$ par l'absurde, on suppose à la fois a et NON(b). Ainsi, le raisonnement par l'absurde nous permet de bénéficier de deux hypothèses là où la démonstration directe et la démonstration par contraposée n'en ont qu'une.

V.2. Démonstration à l'aide d'une disjonction de cas

Lorsqu'une proposition comporte une variable x prenant sa valeur sur un ensemble E, il peut être utile d'effectuer une **partition** de l'ensemble E. On étudiera alors les valeurs de vérité de la proposition pour chaque type de valeur que peut prendre x *i.e.* pour x appartenant successivement à chaque ensemble de la partition.

Exercice 11
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $n^2 - n$ est pair.

VI. Avertissement

Les symboles de quantificateurs et connecteurs logiques servent à exprimer de manière rigoureuse et concise des propositions mathématiques. Il est tout à fait exclu d'utiliser ces symboles à des fins d'abréviation.

- ~~Démontrons qu'$\exists$ un élément x de $\mathbb{R}$ tel que ...~~
- ~~Ce qui prouve que, $\forall x$, la proposition ...~~

VII. Application à la résolution d'équations et inéquations

VII.1. Règles de calcul élémentaire

VII.1.a) Manipulation de fractions

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que les dénominateurs des fractions considérées ne sont pas nuls.

Somme	$\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$
Produit	$\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$
Quantité conjuguée	$\dfrac{a}{b-c} = \dfrac{a(b+c)}{b^2-c^2}$
Division	$\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{bc}$
	$\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{ac}{b}$
	$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$

Exercice
Simplifier les expressions suivantes.

a. $\dfrac{\frac{3}{2}}{3}$

b. $\dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{12} + \dfrac{5}{9} - \dfrac{1}{6}$

c. $\dfrac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 45 \times 100}$

d. $(\sqrt{2}+5\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

e. $\dfrac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}}$

f. $\dfrac{1}{5-3\sqrt{2}} + \dfrac{3-3\sqrt{2}}{7}$

VII.1.b) Puissances entières

Soient $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que les dénominateurs des fractions considérées ne sont pas nuls.

$$\begin{aligned}
a^0 &= 1 \\
a^1 &= a \\
(a^n)^m &= a^{n\times m} \\
(a\times b)^n &= a^n \times b^n \\
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \\
(a^n \times a^m) &= a^{n+m} \\
\left(\frac{a^n}{a^m}\right) &= a^{n-m} \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n}
\end{aligned}$$

Ces listes ne se veulent pas exhaustives.
Elles sont à compléter au fur et à mesure de l'année.

Petit aparté : déterminer le signe d'un produit

Lorsque l'on souhaite déterminer le signe d'une quantité s'écrivant comme un produit, on utilise souvent un tableau de signes.
Considérons par exemple, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le produit :

$$P(x) = (4x-1)(7x-3)(-x-2)$$

Le tableau de signe correspondant est :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{7}$		$+\infty$
$4x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$7x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-2$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$P(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	

Exercice
Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire le tableau de signe de la quantité $\dfrac{(4x-1)(7x-3)}{(-x-2)}$.

VII.1.c) Identités remarquables

Ci-dessous une liste (non exhaustive !) d'identités remarquables. Cette liste est à compléter au fur et à mesure de l'année.

Identités remarquables du second degré :
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 & = & a^2-2ab+b^2 \\ (a-b)(a+b) & = & a^2-b^2 \\ (a+b)^2-(a-b)^2 & = & 4ab \end{array}}$$

Identités remarquables du troisième degré :
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (a+b)^3 & = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a-b)^3 & = & a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ a^3+b^3 & = & (a+b)(a^2-ab+b^2) \\ a^3-b^3 & = & (a-b)(a^2+ab+b^2) \end{array}}$$

En degré quelconque :
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})}$$

On a notamment :

$$\boxed{1-a^n = (1-a)(1+a+a^2+...+a^{n-1})}$$

Exercice
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad 2\sqrt{xe^t} \leqslant x+e^t$.

VII.2. Résolution d'équations

VII.2.a) Premier essai

On considère l'équation suivante.

$$\sqrt{x^2} - 2x = -1 \qquad (E)$$

- Obtention de l'ensemble de définition de (E), noté $\mathcal{D}_{(E)}$
  Avant d'essayer de résoudre (E), on commence par étudier son domaine de définition $\mathscr{D}_{(E)}$. C'est une remarque générale : lors de l'étude d'un objet mathématique, on commence toujours par déterminer son lieu de définition.

  L'équation (E) comporte l'opérateur racine (qui est défini sur $\mathbb{R}^+$).
  Or, comme $x^2 \geqslant 0$, la quantité $\sqrt{x^2}$ est bien définie.
  On en déduit que $\boxed{\mathscr{D}_{(E)} = \mathbb{R}}$

- Obtention d'une équation plus simple par équivalence
  Soit $x \in \mathcal{D}_{(E)}$.

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{x^2} - 2x = -1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2} = 2x - 1 \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{x^2}\right)^2 = (2x-1)^2 \\ \Leftrightarrow & x^2 = 4x^2 - 4x + 1 \\ \Leftrightarrow & 3x^2 - 4x + 1 = 0 \qquad (E') \end{array}$$

- Résolution de (E')
  Ayant obtenu l'équation (E'), il s'agit maintenant de la résoudre.

  Le polynôme $P(X) = 3X^2 - 4X + 1$ admet $x_1 = 1$ comme racine évidente.
  Son autre racine x_2 vérifie $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{3}$. Ainsi, $x_2 = \dfrac{1}{3}$.

  L'ensemble des solutions de (E') est $S' = \left\{1, \dfrac{1}{3}\right\}$

- Résolution de (E)
  Reprenons la résolution de (E).

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad (E') \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \ \texttt{OU} \ x = \frac{1}{3}$$

Comme $(1, \frac{1}{3}) \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_{[E)}$, on obtient : $S = \left\{1, \frac{1}{3}\right\}$.
Cependant :

$$\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \neq -1$$

Ainsi, $\dfrac{1}{3}$ n'est pas solution de (E) !
Cela signifie que l'une des équivalences mentionnées est `FAUSSE` ! Il s'agit de l'élévation au carré. :

$$\sqrt{x^2} = 2x - 1 \quad \cancel{\Leftrightarrow} \quad \left(\sqrt{x^2}\right)^2 = (2x-1)^2$$

⚠

De manière générale :

$$u = v \quad \cancel{\Leftrightarrow} \quad u^2 = v^2$$

Évidemment, l'implication $u = v \Rightarrow u^2 = v^2$ est toujours vérifiée.
Par contre, on peut exhiber un contre-exemple de la réciproque : $(-3)^2 = 3^2$ et $-3 \neq 3$. Il faut donc faire attention aux signes des quantités u et v.
En toute généralité, comme $\sqrt{u^2} = |u|$ (pour tout $u \in \mathbb{R}$), on a :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}, \quad (|u| = |v| \ \Leftrightarrow \ u^2 = v^2)}$$

VII.2.b) Illustration de la méthode sur un exemple

Résolvons l'équation (E) : $\sqrt{x^2} = 2x - 1$ par équivalence.

- **Étape 0** : $\mathscr{D}_{(E)} = \mathbb{R}$.
- **Étape 1** : obtention, par équivalence, de l'équation (E')

  Afin que l'élévation au carré se fasse sans perte de précision, il faut faire une étude précise des signes des quantités considérées. On a : $\sqrt{x^2} \geqslant 0$ (une racine est toujours positive). Deux cas se présentent alors pour $2x - 1$:

  a) $2x - 1 \geqslant 0$: ceci est réalisé pour $x \geqslant \frac{1}{2}$. Dans ce cas, on a :

  $$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[, \quad \left(\sqrt{x^2} = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = (2x-1)^2\right)$$

  b) $2x - 1 < 0$: la recherche de solutions est triviale dans ce cas puisqu'on a alors, si x est solution de (E) : $0 \leqslant \sqrt{x^2} = 2x - 1 < 0$. Impossible !
- **Étape 2** : résolution de (E')

  L'équation (E') : $3x^2 - 4x + 1 = 0$ admet $x = 1$ et $x = \frac{1}{3}$ comme seules solutions.
- **Conclusion** : résolution de (E)

  a) (E) est équivalente à (E') sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Comme $\frac{1}{3} \notin \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, on en conclut que (E) admet 1 pour unique solution sur cet intervalle.

  b) (E) n'admet pas de solution sur l'intervalle $]-\infty, \frac{1}{2}[$.

Exercice
Résoudre l'équation $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} - \sqrt{3x-1} = 0$ en procédant par équivalence.

VII.2.c) Autre méthode

On peut aussi résoudre une équation en commençant par trouver une sur-approximation des solutions, *i.e.* trouver trop de candidats solutions à l'équation (E).

Explicitons la méthode de résolution sur un exemple simple.
On considère l'équation suivante.

$$\sqrt{x^2} - 2x = -1 \qquad (E)$$

La méthode de résolution de (E) peut se présenter en quatre grandes étapes.

- **Étape 0** : $\mathscr{D}_{(E)} = \mathbb{R}$.
- **Étape 1** : Caractérisation des solutions de (E)

  Sous cette forme, l'équation (E) n'est pas facile à résoudre. On va donc opérer des manipulations afin de transformer l'équation (E) en une équation plus simple, notée (E').

  Soit x une solution de (E) (on a notamment $x \in \mathscr{D}_{(E)}$).
  Afin de se débarrasser de l'opérateur racine, on isole le terme $\sqrt{x^2}$ et on élève au carré.

  $$\begin{aligned} & \sqrt{x^2} - 2x = -1 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{x^2} = 2x - 1 \\ \Rightarrow \quad & \left(\sqrt{x^2}\right)^2 = (2x-1)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 = 4x^2 - 4x + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \boxed{3x^2 - 4x + 1 = 0} \qquad (E') \end{aligned}$$

Ayant obtenu l'équation (E'), il s'agit maintenant de la résoudre.

Le polynôme $P(X) = 3X^2 - 4X + 1$ admet $x_1 = 1$ comme racine évidente.
Son autre racine x_2 vérifie $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$. Ainsi, $x_2 = \frac{1}{3}$.

L'ensemble des solutions de (E') est $\boxed{S' = \left\{1, \frac{1}{3}\right\}}$

- **Étape 3** : test des candidats solutions de (E)

  On a résolu l'équation (E') mais a-t-on résolu l'équation initiale (E) pour autant ? Testons les solutions de (E') sur l'équation (E) :

  × Tout d'abord, on a : $1 \in \mathscr{D}_{(E)}$ $(= \mathbb{R})$.
  D'autre part : $\sqrt{1^2} - 2 \times 1 = -1$.
  Ainsi, 1 est bien solution de (E).

  × On a aussi : $\frac{1}{3} \in \mathscr{D}_{(E)}$ $(= \mathbb{R})$.
  D'autre part : $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \neq -1$.
  Ainsi, $\frac{1}{3}$ n'est pas solution de (E).

- **Conclusion**
  L'équation (E) admet pour unique solution le réel 1.
  Autrement dit, l'ensemble des solutions de (E) est $\boxed{S = \{1\}}$

VII.2.d) Résolution par caractérisation / test : fonctionnement

Comme on l'a vu, (E) et (E') n'ont pas forcément les mêmes solutions. Cela provient des manipulations faites pour transformer (E) en (E') : elles ont pu modifier l'ensemble des solutions. Explicitons pourquoi.
Nous avons procédé par implication, ce qui s'écrit formellement :

$$\boxed{x \text{ solution de } (E) \ \Rightarrow \ x \text{ solution de } (E')}$$

Cette implication permet d'affirmer que :

- si x est solution de (E) alors x est solution de (E')
  ↪ toute solution de (E) est une solution de (E') *i.e.* $\boxed{S \ \subseteq \ S'}$
- x peut être solution de (E) sans que x soit solution de (E')

En modifiant (E) en (E'), on ne perd en route aucune solution de (E) (puisque $S' \supseteq S$) mais on a pu créer de « nouvelles solutions » (*i.e.* des solutions de (E') qui ne sont pas solutions de (E)). C'est pourquoi les solutions de (E) sont exactement celles de (E') qui vérifient l'équation (E).

Exercice
Résoudre l'équation $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} - \sqrt{3x-1} = 0$.

VII.2.e) Doit-on procéder par équivalence ou caractérisation / test ?

Lorsqu'il s'agit de résoudre une équation, la méthode consistant à procéder par équivalence est plus systématique. On verra d'ailleurs qu'elle convient également à la résolution d'inéquations.
La méthode par caractérisation / test, plus naturelle, n'est pas à délaisser pour autant. Nous verrons dans des chapitres ultérieurs des cas d'applications très standards de celle-ci.

VII.3. Résolution d'inéquations

Dans le cas des inéquations, seul le raisonnement par équivalence est adapté. Le problème avec le raisonnement par implication provient de l'étape consistant à tester les solutions de (I') sur l'équation (I). Cette étape est généralement difficile à mettre en place lors de la résolution d'inéquations (généralement (I') admet non pas un nombre fini de solutions mais un ensemble infini de solutions). On préférera donc toujours le raisonnement par équivalence dans le cas d'inéquations.

VII.3.a) Illustration de la méthode sur un exemple

On considère l'inéquation suivante.

$$-x+1 < \sqrt{3x^2-4x-7} \qquad (I)$$

- **Étape 0** : déterminer l'ensemble $\mathscr{D}_{(I)}$

  On remarque que $3x^2-4x-7 = 3\,(x+1)\left(x-\frac{7}{3}\right)$.

  $\mathscr{D}_{(I)} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2-4x-7 \geqslant 0\} = \,]-\infty,-1] \cup \left[\frac{7}{3},+\infty\right[$.

$$\boxed{\mathscr{D}_{(I)} = \,]-\infty,-1] \cup \left[\tfrac{7}{3},+\infty\right[}$$

- **Étape 1** : obtention, par équivalence, de l'inéquation (I')

  Comme dans le cas précédent : $u < v \quad \cancel{\Leftrightarrow} \quad u^2 < v^2$.

  En toute généralité, comme $\sqrt{u^2} = |u|$ (pour tout $u \in \mathbb{R}$), on a :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}, \quad (|u| < |v| \ \Leftrightarrow\ u^2 < v^2)}$$

  Il s'agit donc de procéder par disjonction de cas, en fonction du signe des quantités que l'on considère.

  Soit $x \in \mathscr{D}_{(I)}$. Dans notre exemple :

  × $\sqrt{3x^2-4x-7} \geqslant 0$ (une racine est toujours positive),

  × $-x+1 \geqslant 0$ si $x \in]-\infty,1]$ et $-x+1 < 0$ si $x \in]1,+\infty]$.

  a) si $-x+1 \geqslant 0$

  Si $x \in]-\infty,1]$, on a les équivalences suivantes.

$$\begin{array}{rrcl} & -x+1 & < & \sqrt{3x^2-4x-7} \\ \Leftrightarrow & (-x+1)^2 & < & 3x^2-4x-7 \\ \Leftrightarrow & x^2-2x+1 & < & 3x^2-4x-7 \\ \Leftrightarrow & 0 & < & 2x^2-2x-8 \\ \Leftrightarrow & 0 & < & x^2-x-4 \end{array}$$

  b) si $-x+1 < 0$

  Si $x \in]1,+\infty[$, la recherche des solutions de l'inéquation est triviale puisque on doit alors trouver tous les éléments x tels que :

$$\sqrt{3x^2-4x-7} > -x+1 \quad \text{où} \quad x+1<0$$

  Or on a : $\sqrt{3x^2-4x-7} \geqslant 0 > -x+1$ (une racine est toujours positive).

  Tout réel x (dans $]1,+\infty[$) est solution de l'inéquation (I').

- **Étape 2** : résolution de (I')

  Seul le cas ***a)*** doit être détaillé puisque la résolution est triviale dans le cas ***b)***. Il s'agit donc de déterminer le signe du trinôme $P(x) = x^2-x-4$.

  Ce trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

  Ainsi $P(x) > 0$ si $x \in \,]-\infty, x_1[\, \cup \,]x_2,+\infty[$.

- **Conclusion** : résolution de (I)

a) Dans ce premier cas, l'ensemble des solutions de (I) est donc :

$$S_1 \;=\; \mathscr{D}_{(I)} \;\cap\;]-\infty, 1] \;\cap\; (]-\infty, x_1[\, \cup\,]x_2, +\infty[) \;=\;]-\infty, x_1[$$

b) Dans ce deuxième cas, l'ensemble des solutions de (I) est donc :

$$S_2 \;=\; \mathscr{D}_{(I)} \;\cap\;]1, +\infty[\;=\; \left[\tfrac{7}{3}, +\infty\right[$$

L'ensemble S des solutions de l'inéquation (I) est donc :

$$\boxed{S \;=\; S_1 \cup S_2 \;=\;]-\infty, x_1[\;\cup\; \left[\tfrac{7}{3}, +\infty\right[}$$

Exercice
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $x + 2 \geqslant \sqrt{x+5}$

b. $-x + 1 > \sqrt{3x^2 - 2x - 7}$

c. $x - 2 \leqslant \sqrt{x-1}$

d. $\sqrt{x+3} < -x + 4$

e. $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1$