

Interrogation 8

1. Donner une écriture exponentielle du nombre complexe $1 - i\sqrt{3}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

- Ensuite :

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = 2 e^{-i \frac{\pi}{3}}$$

Une écriture exponentielle de $1 - i\sqrt{3}$ est $2 e^{-i \frac{\pi}{3}}$.

□

2. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$.

► **Initialisation**

Soit $z_1 \in \mathbb{C}$.

$$\left| \sum_{k=1}^1 z_k \right| = |z_1| = \sum_{k=1}^1 |z_k|$$

En particulier : $\left| \sum_{k=1}^1 z_k \right| \leq \sum_{k=1}^1 |z_k|$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. : $\forall (z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}, \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$)

Soit $(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^n z_k + z_{n+1} \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| && (\text{par inégalité triangulaire}) \\ &= \sum_{k=1}^n |z_k| + |z_{n+1}| && (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$.

□

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $T_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

Démonstration.

• Tout d'abord :

$$T_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Im}(e^{ikx}) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^n e^{ikx}\right) \quad (\text{par linéarité de } \operatorname{Im})$$

• On note alors : $S_n = \sum_{k=0}^n e^{ikx}$. On remarque :

$$T_n = \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k$$

Deux cas se présentent :

× si $x \equiv 0 [2\pi]$, alors : $e^{ix} = 1$. D'où :

$$S_n = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$$

Ainsi : $T_n = \operatorname{Im}(S_n) = 0$.

× si $x \not\equiv 0 [2\pi]$, alors : $e^{ix} \neq 1$. D'où :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{i \frac{n+1}{2} x}}{e^{i \frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i(n+1) \frac{\pi}{2}} - e^{i(n+1) \frac{\pi}{2}}}{e^{-i \frac{\pi}{2}} - e^{i \frac{\pi}{2}}} \\ &= e^{in \frac{\pi}{2}} \times \frac{\cancel{2i} \sin((n+1) \frac{\pi}{2})}{\cancel{-2i} \sin(\frac{\pi}{2})} \quad (\text{par formule d'Euler}) \\ &= \frac{\sin((n+1) \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})} \times e^{in \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\frac{\sin((n+1) \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})} \in \mathbb{R}$, par linéarité de Im :

$$T_n = \operatorname{Im}(S_n) = \operatorname{Im}\left(\frac{\sin((n+1) \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})} \times e^{in \frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\sin((n+1) \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})} \operatorname{Im}(e^{in \frac{\pi}{2}})$$

Finalement : $T_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \equiv 0 [2\pi] \\ \frac{\sin((n+1) \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})} \sin(n \frac{\pi}{2}) & \text{si } x \not\equiv 0 [2\pi] \end{cases}$

□

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^4(x)$.

Démonstration.

On calcule :

$$\begin{aligned} & \sin^4(x) \\ = & (\sin(x))^4 \\ = & \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 && \text{(par formule d'Euler)} \\ = & \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^4}{2^4 i^4} \\ = & \frac{1}{2^4} ((e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3(-e^{-ix}) + 6(e^{ix})^2(-e^{-ix})^2 + 4e^{ix}(-e^{-ix})^3 + (-e^{-ix})^4) && \text{(par formule du binôme de Newton)} \\ = & \frac{1}{2^4} (e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ = & \frac{1}{2^4} (2\cos(4x) - 4 \times 2\cos(2x) + 6) && \text{(par formule d'Euler)} \\ = & \frac{1}{2^3} (\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3) \end{aligned}$$

$$\sin^4(x) = \frac{1}{2^3} (\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)$$

□