

Interrogation 7

1. Soient E et F deux ensembles. Soit $(B_1, B_2) \in (\mathcal{P}(B))^2$.

Soit $f : E \rightarrow F$.

Démontrer : $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Démonstration.

On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

Alors : $f(x) \in B_1 \cap B_2$. Donc :

$$f(x) \in B_1 \quad \text{ET} \quad f(x) \in B_2$$

D'où :

$$x \in f^{-1}(B_1) \quad \text{ET} \quad x \in f^{-1}(B_2)$$

Ainsi : $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

($\supset$) Soit $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. Alors :

$$x \in f^{-1}(B_1) \quad \text{ET} \quad x \in f^{-1}(B_2)$$

Donc :

$$f(x) \in B_1 \quad \text{ET} \quad f(x) \in B_2$$

D'où : $f(x) \in B_1 \cap B_2$.

Ainsi : $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

Finalement : $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

□

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner la définition de $|z|$.

Démonstration.

La définition de $|z|$ est : $|z| = \sqrt{z \bar{z}}$.

□

3. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \overline{\prod_{k=1}^n z_k} = \prod_{k=1}^n \bar{z}_k$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \overline{\prod_{k=1}^n z_k} = \prod_{k=1}^n \bar{z}_k$.

► **Initialisation**

Soit $z_1 \in \mathbb{C}$.

$$\overline{\prod_{k=1}^1 z_k} = \bar{z}_1 = \prod_{k=1}^1 \bar{z}_k$$

D'où : $\mathcal{P}(1)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. : $\forall (z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}, \overline{\prod_{k=1}^{n+1} z_k} = \prod_{k=1}^{n+1} \overline{z_k}$)

Soit $(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\begin{aligned} \overline{\prod_{k=1}^n z_k} &= \overline{\left(\prod_{k=1}^n z_k \right) \times z_{n+1}} \\ &= \overline{\prod_{k=1}^n z_k} \times \overline{z_{n+1}} && \text{(par compatibilité de la conjugaison avec le produit)} \\ &= \left(\prod_{k=1}^n \overline{z_k} \right) \times \overline{z_{n+1}} && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} \overline{z_k} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$.

□

4. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $|z - i| = |z + i|$.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} |z - i| = |z + i| &\Leftrightarrow |z - i|^2 = |z + i|^2 && \text{(par injectivité de } \sqrt{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}_+) \\ &\Leftrightarrow (z - i) \overline{(z - i)} = (z + i) \overline{(z + i)} \\ &\Leftrightarrow (z - i) (\overline{z} + i) = (z + i) (\overline{z} - i) \\ &\Leftrightarrow \cancel{z\overline{z}} + iz - i\overline{z} + \cancel{i} = \cancel{z\overline{z}} - iz + i\overline{z} + \cancel{i} \\ &\Leftrightarrow 2i(z - \overline{z}) = 0 \\ &\Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2i \operatorname{Im}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :
 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\} = \{x + i \times 0 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

□

b) [BONUS] Interpréter géométriquement ce qui a été démontré en question précédente.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note :

- × M le point d'affixe z ,
- × A le point d'affixe i ,
- × B le point d'affixe $-i$.

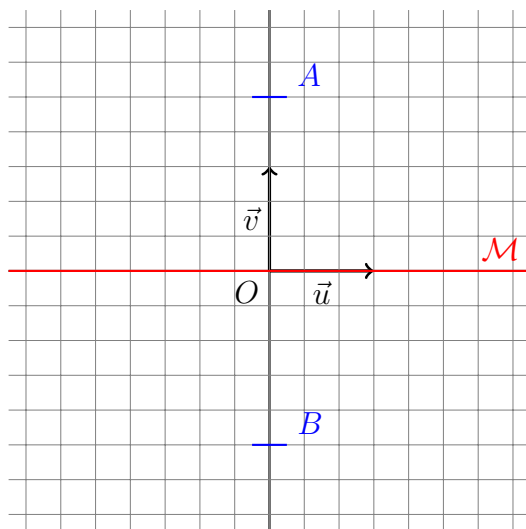
On peut remarquer :

$$|z - i| = |z + i| \Leftrightarrow d(A, M) = d(B, M)$$

$\Leftrightarrow$ le point M est équidistant des points A et B

$\Leftrightarrow$ le point M est située sur la médiatrice du segment $[AB]$

L'ensemble des solutions de l'équation a donc pour image dans le plan complexe la médiatrice $\mathcal{M}$ du segment $[AB]$, qui est exactement l'axe réel.



□