

Interrogation 6

1. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F .

a) Quel est la définition de $\text{Im}(f)$?

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\} \\ &= \{f(x) \mid x \in E\}\end{aligned}$$

b) Démontrer :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$$

Démonstration.

On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que f est injective.

Démontrons : $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$.

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $x \in f^{-1}(f(A))$.

Alors : $f(x) \in f(A)$.

Il existe donc $u \in A$ tel que : $f(x) = f(u)$.

Or, l'application f est injective. Ainsi : $x = u$. En particulier : $x \in A$.

($\supset$) Soit $x \in A$.

Alors : $f(x) \in f(A)$. Autrement dit : $x \in f^{-1}(f(A))$.

Finalement : $f^{-1}(f(A)) = A$.

($\Leftarrow$) Supposons : $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$.

Démontrons que f est injective.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Supposons : $f(x_1) = f(x_2)$.

On note : $B = \{x_2\}$.

On remarque alors : $f(x_1) \in f(B)$. Donc : $x_1 \in f^{-1}(f(B))$.

Or : $B \in \mathcal{P}(E)$. Donc : $f^{-1}(f(B)) = B$. D'où : $x_1 \in B = \{x_2\}$.

On en conclut : $x_1 = x_2$.

L'application f est donc injective.

$$\text{Finalement : } f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A.$$

□

c) Soit G un ensemble. Soit g une application de F dans G . Démontrer :

$$(g \circ f \text{ surjective}) \Rightarrow (g \text{ surjective})$$

Démonstration.

Supposons que l'application $g \circ f$ est surjective.

Démontrons que g est surjective.

Soit $z \in G$.

Comme l'application $g \circ f$ est surjective, alors il existe $x \in E$ tel que : $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

On note alors : $y = f(x)$. On obtient :

× $y \in F$ (car f est à valeurs dans F)

× $z = g(y)$.

L'application g est donc surjective.

$$\text{Finalement : } (g \circ f \text{ surjective}) \Rightarrow (g \text{ surjective}).$$

□

2. On note f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f &:]0, +\infty[\rightarrow]0, 1[\\ x &\mapsto 1 - e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Démontrer que la fonction f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Démonstration.

Soit $y \in]0, 1[$. Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = 1 - e^{-\frac{x}{2}} \\ &\Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}} = 1 - y \\ &\Leftrightarrow -\frac{x}{2} = \ln(1 - y) \quad \begin{array}{l} \text{(par injectivité de exp} \\ \text{sur } \mathbb{R} \text{ et : } 1 - y > 0) \end{array} \\ &\Leftrightarrow x = -2 \ln(1 - y) \end{aligned}$$

Le réel y admet un unique antécédent par f (il s'agit du réel $-2 \ln(1 - y)$).

On en déduit que l'application f est bijective de bijection réciproque :

$$\begin{aligned} f^{-1} &:]0, 1[\rightarrow]0, +\infty[\\ x &\mapsto -2 \ln(1 - x) \end{aligned}$$

□