

Interrogation 5

1. Étudier complètement la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x^5)$ sur $] - 1, +\infty[$: dérivabilité, tableau de variations et limites.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $] - 1, +\infty[$, car elle est la composée $f = f_2 \circ f_1$ de :
 - $\times$ $f_1 : x \mapsto 1 + x^5$ qui :
 - est dérivable sur $] - 1, +\infty[$,
 - vérifie : $f_1(] - 1, +\infty[) \subset]0, +\infty[$,
 - $\times$ $f_2 : x \mapsto \ln(x)$ qui est dérivable sur $]0, +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $] - 1, +\infty[$.

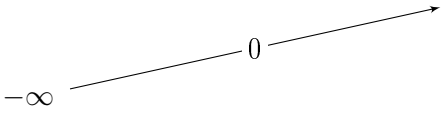
- Soit $x \in] - 1, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{5x^4}{1+x^5}$$

On remarque :

$$f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in] - 1, +\infty[\setminus \{0\}, f'(x) > 0$$

- On obtient le tableau de variations suivant.

x	-1	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$+$
Variation de f			

- Détaillons les éléments de ce tableau.

$\times$ Tout d'abord : $\lim_{x \rightarrow -1} 1 + x^5 = 0$. De plus : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$.

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$

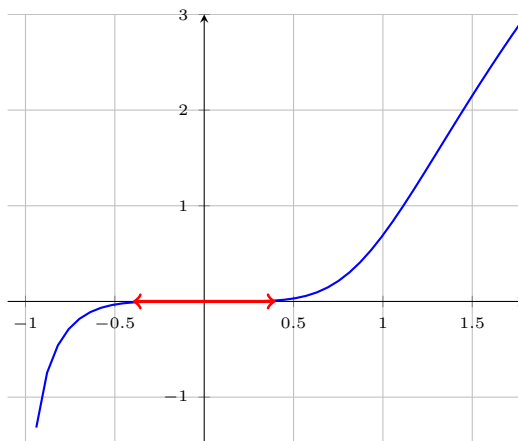
$\times$ Ensuite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x^5 = +\infty$. De plus : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

□

2. Tracer la courbe représentative de la fonction f .

Démonstration.



□

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

D'après la question 1., la fonction f est :

× continue (car dérivable) sur $] -1, +\infty[$,

× strictement croissante sur $] -1, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $] -1, +\infty[$ sur $f(] -1, +\infty[)$ avec :

$$f(] -1, +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=] -\infty, +\infty[$$

Or : $1 \in] -\infty, +\infty[$.

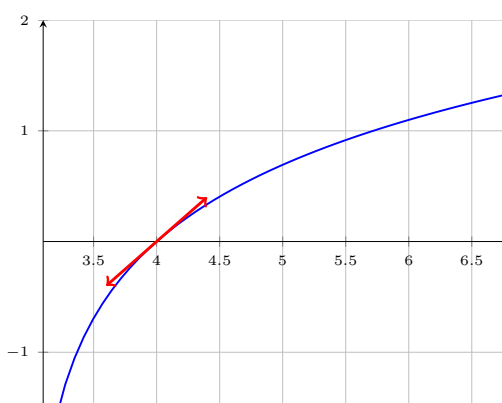
Ainsi, le réel 1 admet un unique antécédent par f .

L'équation $f(x) = 1$ admet donc une unique solution.

□

4. Tracer la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto \ln(x - 3)$.

Démonstration.



□

5. On note : $E = \{2, \{-1, 1\}, \{1\}\}$. Expliciter $\mathcal{P}(E)$.

Démonstration.

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \\ \{2\}, \{-1, 1\}, \{1\}, \\ \{2, \{-1, 1\}\}, \{2, 1\}, \{-1, 1, 1\}, \\ \{2, \{-1, 1\}, 1\} \end{array} \right\}$$

□