

Interrogation 4

1. Étudier complètement la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 + e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$: dérivabilité, tableau de variations et limites.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $f = f_2 \circ f_1$ de :
 - $\times f_1 : x \mapsto 1 + e^{-x}$ qui :
 - est dérivable sur $\mathbb{R}$,
 - vérifie : $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$,
 - $\times f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -e^{-x} \times \frac{1}{2\sqrt{1+e^{-x}}} = -\frac{e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}} < 0$$

- On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	—
Variation de f	$+\infty$ $\searrow$ 1

- Détaillons les éléments de ce tableau.

$\times$ On remarque : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^{-x} = +\infty$. Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

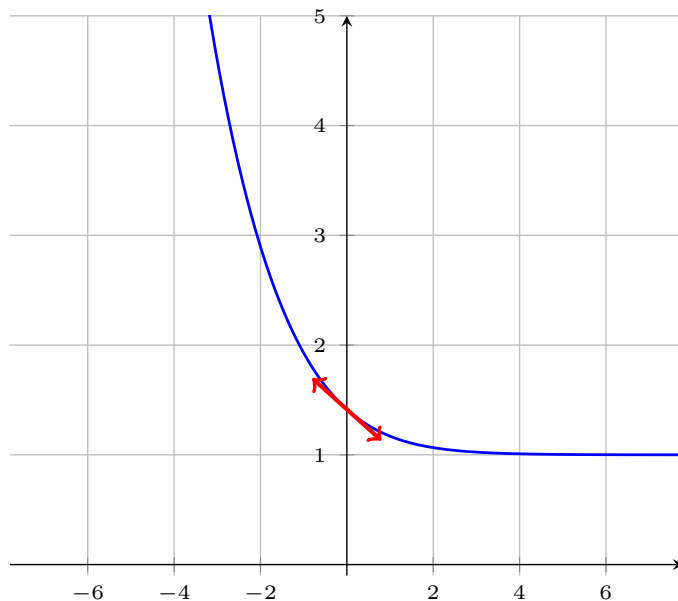
$\times$ On remarque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1$. Or, par continuité de $\sqrt{\cdot}$ en 1 : $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$.

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

□

2. Tracer la courbe représentative de la fonction f .

Démonstration.



□

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Démonstration.

D'après la question 1., la fonction f est :

- × continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$,
- × strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ avec :

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[=]1, +\infty[$$

Or : $2 \in]1, +\infty[$.

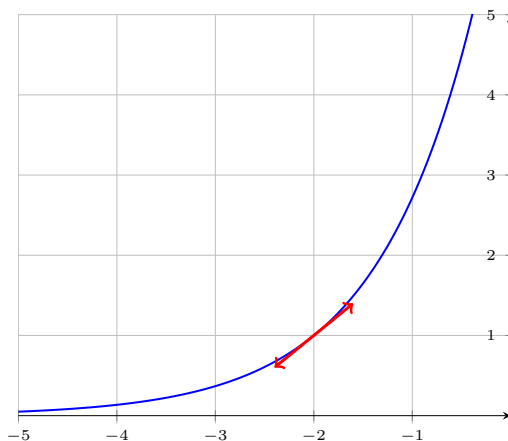
Le réel 2 admet donc un unique antécédent par f .

L'équation $f(x) = 2$ admet donc une unique solution.

□

4. Tracer la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto \exp(x + 2)$.

Démonstration.



□