

Interrogation 31

1. Énoncer :

a) l'inégalité de Markov.

Démonstration.

Soit X une v.a.r. . Supposons : $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.
 $\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(\{X \geq a\}) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$

□

b) l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Démonstration.

Soit X une v.a.r. admettant une variance fini.
 $\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$

□

2. On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto \int_{-1}^1 \frac{P(t) Q(t)}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_2[X]$.

Démonstration.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie sur $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$.

L'application $t \mapsto \frac{P(t) Q(t)}{1+t^2}$ est continue sur le SEGMENT $[-1, 1]$.

On en conclut que l'intégrale $\int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$ est bien définie.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned} \langle Q, P \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{Q(t) \times P(t)}{1+t^2} dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{P(t) \times Q(t)}{1+t^2} dt && (\text{car la loi } \times \text{ est commutative}) \\ &= \langle P, Q \rangle \end{aligned}$$

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite

Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Soit $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}
 \langle P, \mu_1 \cdot Q_1 + \mu_2 \cdot Q_2 \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{P(t) \times (\mu_1 \cdot Q_1 + \mu_2 \cdot Q_2)(t)}{1+t^2} dt \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{P(t) \times (\mu_1 \times Q_1(t) + \mu_2 \times Q_2(t))}{1+t^2} dt && \text{(par linéarité de l'évaluation en un point)} \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{\mu_1 P(t) \times Q_1(t) + \mu_2 P(t) \times Q_2(t)}{1+t^2} dt && \text{(par distributivité de la loi } \times \text{ sur la loi } + \text{)} \\
 &= \mu_1 \int_{-1}^1 \frac{P(t) \times Q_1(t)}{1+t^2} dt + \mu_2 \int_{-1}^1 \frac{P(t) \times Q_2(t)}{1+t^2} dt && \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
 &= \mu_1 \langle P, Q_1 \rangle + \mu_2 \langle P, Q_2 \rangle
 \end{aligned}$$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche, car elle est :

- × symétrique,
- × linéaire à droite.

On en conclut que c'est une forme (c'est une application à valeurs dans $\mathbb{R}$) bilinéaire symétrique.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

× Tout d'abord :

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t) P(t)}{1+t^2} dt = \int_{-1}^1 \frac{(P(t))^2}{1+t^2} dt$$

Pour tout $t \in [-1, 1]$, $(P(t))^2 \geq 0$ et $1+t^2 \geq 0$.

Par croissance de l'intégrale :

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 \frac{(P(t))^2}{1+t^2} dt \geq 0$$

× Supposons maintenant : $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 \frac{(P(t))^2}{1+t^2} dt = 0$. Démontrons : $P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.

La fonction $t \mapsto \frac{(P(t))^2}{1+t^2}$ est :

- × positive sur $[-1, 1]$,
- × continue sur $[-1, 1]$,
- × d'intégrale nulle sur $[-1, 1]$.

On en conclut que cette fonction est nulle sur $[-1, 1]$.

$$\forall t \in [-1, 1], \frac{(P(t))^2}{1+t^2} = 0$$

donc $\forall t \in [-1, 1], (P(t))^2 = 0$ (car $1+t^2 \neq 0$)

donc $\forall t \in [-1, 1], P(t) = 0$

donc P admet une infinité de racines

donc $P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, symétrique et définie-positive. C'est donc bien un produit scalaire.

□

3. On note $E = \mathbb{R}^3$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) L'endomorphisme f est-il bijectif ?
Que peut-on en déduire ?

Démonstration.

Remarquons :

$$\det(f) = \det(A) = 0 \quad (\text{en effet, la matrice } A \text{ est non inversible puisque ses deux premières colonnes sont opposées})$$

On en déduit que 0 est valeurs propre de f .

□

b) Démontrer : $\chi_f(X) = X(X+1)^2$.
On attend les calculs sur la feuille.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= \chi_{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}(X) \\ &= \det \left(X I_3 - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \right) \\ &= \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 1 \\ 1 & X-1 & 2 \\ 1 & -1 & X+2 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & X+2 \\ 1 & X-1 & 2 \\ X+1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (X+1)L_1}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & X+2 \\ 0 & X & -X \\ 0 & -1 - (X+1)(-1) & 1 - (X+1)(X+2) \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} X & -X \\ X & -1 - 3X - X^2 \end{vmatrix} \quad (\text{en développant par rapport à la 1}^{\text{ère}} \text{ colonne}) \\ &= -X \begin{vmatrix} 1 & -X \\ 1 & -1 - 3X - X^2 \end{vmatrix} \\ &= -X \left((-1 - 3X - X^2) + X \right) \\ &= \cancel{-X} (\cancel{-1}) (X^2 + 2X + 1) \end{aligned}$$

Ainsi : $\chi_f(X) = X(X^2 + 2X + 1) = X(X+1)^2$.
On en déduit : $\text{Sp}(f) = \{0, -1\}$.

□