

Interrogation 30

1. Énoncer :

a) l'inégalité de Markov.

Démonstration.

Soit X une v.a.r. . Supposons : $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.
 $\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(\{X \geq a\}) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$

□

b) l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Démonstration.

Soit X une v.a.r. admettant une variance finie.
 $\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$

□

2. Soient $X \sim \mathcal{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$ et $Y \sim \mathcal{B}\left(6, \frac{1}{3}\right)$ telles que $\text{Cov}(X, Y) = -1$.
 Déterminer $\mathbb{V}(X - Y)$.

Démonstration.

La v.a.r. $X - Y$ est finie. Elle admet donc une variance finie.

On calcule :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}(X - Y) &= \mathbb{V}(X) + 2 \text{Cov}(X, -Y) + \mathbb{V}(Y) \\
 &= \mathbb{V}(X) - 2 \text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y) && (\text{par linéarité à droite de la covariance}) \\
 &= \mathbb{V}(X) + 2 + \mathbb{V}(Y) && (d'après l'énoncé) \\
 &= 4 \times \frac{1}{2} + 2 + 6 \times \frac{1}{3} && (\text{car : } X \sim \mathcal{B}\left(4, \frac{1}{2}\right) \text{ et } Y \sim \mathcal{B}\left(6, \frac{1}{3}\right)) \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{V}(X - Y) = 6$$

□

3. Soient X et Y deux variables aléatoires. Compléter les assertions suivantes par $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \quad \Leftarrow \quad X \text{ est indépendante de } Y$$

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \quad \Leftarrow \quad X \text{ est indépendante de } Y$$

4. Soit $p \in]0, 1[$. On effectue une infinité de lancers mutuellement indépendants d'une pièce dont la probabilité de tomber sur Pile est p .

On appelle chaîne une succession de Pile, ou une succession de Face. On note X la longueur de la première chaîne obtenue et Y la longueur de la deuxième chaîne obtenue. Par exemple, si on obtient la réalisation suivante :

$$\omega = (\text{Pile}, \text{Pile}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Face}, \dots)$$

Alors : $X(\omega) = 3$ et $Y(\omega) = 1$.

- a) Déterminer la loi du couple (X, Y) . En particulier, démontrer :

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = (1 - p)^{i+1} p^j + p^{i+1} (1 - p)^j$$

Démonstration.

- Tout d'abord : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ car des longueurs de chaînes sont des entiers non nuls.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$P_k : \text{« obtenir pile au } k^{\text{ème}} \text{ lancer »}$$

$$F_k : \text{« obtenir face au } k^{\text{ème}} \text{ lancer »}$$

- Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ On remarque alors :

L'événement $\{X = i\} \cap \{Y = j\}$ est réalisé

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \quad \begin{aligned} & (\text{on obtient Face au } 1^{\text{er}} \text{ lancer} \\ & \text{ET on obtient Face au } 2^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ & \vdots \\ & \text{ET on obtient Face au } i^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ & \text{ET on obtient Pile au } (i + 1)^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ & \vdots \\ & \text{ET on obtient Pile au } i + j^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ & \text{ET on obtient Face au } (i + j + 1)^{\text{ème}} \text{ lancer}) \end{aligned} \\ \text{OU} & \quad \begin{aligned} & (\text{on obtient Pile au } 1^{\text{er}} \text{ lancer} \\ & \text{ET on obtient Pile au } 2^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ & \vdots \\ & \text{ET on obtient Pile au } i^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ & \text{ET on obtient Face au } (i + 1)^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ & \vdots \\ & \text{ET on obtient Face au } i + j^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ & \text{ET on obtient Pile au } (i + j + 1)^{\text{ème}} \text{ lancer}) \end{aligned} \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
& \text{L'événement } \{X = i\} \cap \{Y = j\} \text{ est réalisé} \\
\Leftrightarrow & \quad \begin{aligned} & \text{(l'événement } F_1 \text{ est réalisé} \\ & \text{ET l'événement } F_2 \text{ est réalisé} \\ & \vdots \\ & \text{ET l'événement } F_i \text{ est réalisé} \\ & \text{ET l'événement } P_{i+1} \text{ est réalisé)} \\ & \vdots \\ & \text{ET l'événement } P_{i+j} \text{ est réalisé} \\ & \text{ET l'événement } F_{i+j+1} \text{ est réalisé)} \\ \text{OU} & \quad \begin{aligned} & \text{(l'événement } P_1 \text{ est réalisé} \\ & \text{ET l'événement } P_2 \text{ est réalisé} \\ & \vdots \\ & \text{ET l'événement } P_i \text{ est réalisé} \\ & \text{ET l'événement } F_{i+1} \text{ est réalisé} \\ & \vdots \\ & \text{ET l'événement } F_{i+j} \text{ est réalisé} \\ & \text{ET l'événement } P_{i+j+1} \text{ est réalisé)} \end{aligned} \end{aligned}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\bigcap_{k=1}^i F_k \right) \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{i+j} P_k \right) \cap F_{i+j+1} \right) \cup \left(\left(\bigcap_{k=1}^i P_k \right) \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{i+j} F_k \right) \cap P_{i+j+1} \right) \text{ est réalisé}$$

On en déduit :

$$\{X = i\} \cap \{Y = j\} = \left(\left(\bigcap_{k=1}^i F_k \right) \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{i+j} P_k \right) \cap F_{i+j+1} \right) \cup \left(\left(\bigcap_{k=1}^i P_k \right) \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{i+j} F_k \right) \cap P_{i+j+1} \right)$$

Comme les deux événements de l'union sont incompatibles, alors :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) \\
&= \mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{k=1}^i F_k \right) \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{i+j} P_k \right) \cap F_{i+j+1} \right) + \mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{k=1}^i P_k \right) \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{i+j} F_k \right) \cap P_{i+j+1} \right) \\
&= \left(\prod_{k=1}^i \mathbb{P}(F_k) \right) \times \left(\prod_{k=i+1}^{i+j} \mathbb{P}(P_k) \right) \times \mathbb{P}(F_{i+j+1}) + \left(\prod_{k=1}^i \mathbb{P}(P_k) \right) \times \left(\prod_{k=i+1}^{i+j} \mathbb{P}(F_k) \right) \times \mathbb{P}(P_{i+j+1}) \\
& \quad (\text{car } P_1, \dots, P_{i+j+1} \text{ sont mutuellement indépendants}) \\
&= \left(\prod_{k=1}^i (1-p) \right) \times \left(\prod_{k=i+1}^{i+j} p \right) \times (1-p) + \left(\prod_{k=1}^i p \right) \times \left(\prod_{k=i+1}^{i+j} (1-p) \right) \times p
\end{aligned}$$

Finalement : $\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = (1-p)^{i+1} p^j + p^{i+1} (1-p)^j$.	□
--	---

b) Déterminer la loi de X .

Démonstration.

- On rappelle : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

- Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

La famille $(\{Y = j\})_{j \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.

Par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X = i\}) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) \\&= \sum_{j=1}^{+\infty} ((1-p)^{i+1} p^j + p^{i+1} (1-p)^j) \quad (d'après la question précédente) \\&= (1-p)^{i+1} \sum_{j=1}^{+\infty} p^j + p^{i+1} \sum_{j=1}^{+\infty} (1-p)^j \\&= (1-p)^{i+1} \times p \frac{1}{1-p} + p^{i+1} \times (1-p) \frac{1}{1-(1-p)} \\&= (1-p)^i p + p^i (1-p)\end{aligned}$$

$\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{X = i\}) = (1-p)^i p + p^i (1-p)$

□