

Interrogation 2



On portera la plus grande attention à l'introduction des variables utilisées, *i.e.* à la quantification.

1. Énoncer la formule du binôme de Newton.

Démonstration.

La formule du binôme de Newton est :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

□

2. On note (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$.

Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_0)^{2^n}$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n = (u_0)^{2^n}$.

► **Initialisation**

On remarque : $(u_0)^{2^0} = (u_0)^1 = u_0$.

D'où : $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $u_{n+1} = (u_0)^{2^{n+1}}$)

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n^2 && (\text{par définition de } u_{n+1}) \\ &= ((u_0)^{2^n})^2 && (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= (u_0)^{2^n \times 2} \\ &= (u_0)^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

D'où : $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_0)^{2^n}$.

□

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

On exprimera cette somme sous forme d'une somme télescopique.

Démonstration.

On calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \ln(n+1) - \ln(\cancel{1}) && (\text{par télescope}) \end{aligned}$$

Ainsi : $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(n+1)$.

□

4. Résoudre l'équation : $\sqrt{x+1} = x-1$.

Démonstration.

- Déterminons l'ensemble de validité de cette équation.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

L'équation $\sqrt{x+1} = x-1$
est bien définie $\Leftrightarrow x+1 \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{car } \sqrt{\cdot} \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+)$

$$\Leftrightarrow x+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1$$

L'ensemble de validité de l'équation est $[-1, +\infty[$.

- Soit $x \in [-1, +\infty[$. Deux cas se présentent :

× si $x < 1$, alors :

- d'une part : $x-1 < 0$,

- d'autre part : $\sqrt{x+1} \geq 0$.

Ainsi, le réel x n'est pas solution de l'équation.

× si $x \geq 1$:

$$\sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow x+1 = (x-1)^2 \quad (\text{par injectivité de la fonction } \sqrt{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}_+)$$

$$\Leftrightarrow x + \cancel{1} = x^2 - 2x + \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ OU } x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ OU } x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \quad (\text{car : } x \geq 1)$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc : $\{3\}$.

□

5. a) Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable x est : libre / liée
 La variable x est muette. Elle est liée par le symbole $\mapsto$. Rappelons qu'une fonction est un mécanisme d'association : à chaque valeur de x est associée une image par la fonction. Il ne faut d'ailleurs pas confondre la fonction f et la valeur $f(x)$.
 Cette valeur $f(x)$ dépend évidemment de x qui apparaît dès lors comme une variable libre.

- b) Dans l'écriture $(\{X = i\})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, la variable i est : libre / liée
 et la variable n est : libre / liée
 La variable i est muette. Elle est liée par les symboles de parenthèses qui permettent ici de définir une famille. Cette famille est un n -uplet d'événements. On peut aussi l'écrire :

$$(\{X = 1\}, \{X = 2\}, \dots, \{X = n\})$$

Cette écriture, dite « en extension » (on liste l'un après l'autre tous les objets de la famille), permet de bien constater qu'il n'y a pas de dépendance en une quelconque variable.
 La variable n est libre. Qu'on utilise l'écriture initiale (« en compréhension ») ou celle en extension, on constate qu'il y a une dépendance en la variable n qui n'apparaît sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

- c) Le résultat de la quantité $\sum_{i=1}^k i$ dépend de : $i / k / \text{ni } i \text{ ni } k$
 La variable i est muette car c'est la variable de sommation. Cette variable est sous la portée du symbole de sommation $\sum$ (on dit aussi qu'elle est liée par ce symbole).
 La variable k est libre. Elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique.
 Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable k .

- d) Une variable muette est : libre / liée
- e) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non),
 la quantité $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: ~~dépend de n~~ /
 : ne dépend pas de n /
~~peut dépendre de n~~

Rappelons quelques définitions :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ (où } \ell \in \mathbb{R}) & \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty & \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty & \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq A) \end{aligned}$$

La variable n est donc muette car, dans tous les cas, elle est sous la portée d'un quantificateur.

- f) Dans l'écriture $\int_0^x f(t) dt$, la variable t est : libre / liée
 la variable x est : libre / liée
 La variable t est muette car c'est la variable d'intégration. Elle est sous la portée du symbole d'intégration $\int$ (elle est liée par ce symbole).
 La variable x est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématiques).

g) Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } y = 0\}$,

la variable x est : ~~libre~~ / liée

la variable y est : ~~libre~~ / liée

la variable z est : ~~libre~~ / liée

Les variables x , y et z sont muettes. Ces variables sont toutes liées par les accolades. Il est précisé que toutes ces variables sont réelles. On s'intéresse ici à tous les réels x , y et z vérifiant une condition donnée.

Attention, dans l'écriture : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = x + y\}$, seules les variables x et y sont liées. La variable z est libre.

h) Dans l'écriture : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$,

la variable x est : ~~libre~~ / liée

la variable y est : ~~libre~~ / liée

Les variables x et y sont muettes car elles sont chacune sous la portée d'un quantificateur (quantificateur universel pour x et quantificateur existentiel pour y).

i)	Une variable libre	doit toujours / : ne doit jamais / doit parfois	être introduite par un « Soit »
-----------	--------------------	---	------------------------------------

j)	Une variable liée	doit toujours / : ne doit jamais / doit parfois	être introduite par un « Soit »
-----------	-------------------	---	------------------------------------