

Interrogation 29

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $p \in]0, 1[$.

Un employé reçoit X appels par jour. La v.a.r. X suit une loi de Poisson de paramètre λ , notée $\mathcal{P}(\lambda)$, i.e. :

$$\times X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\times \forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{X = i\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

Lorsque l'employé reçoit i appels, il répond à chacun de ces appels avec une probabilité p . On note Y le nombre d'appels auxquels il répond dans la journée.

a) Soit $i \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = i\}$.

Démonstration.

- Si l'événement $\{X = i\}$ est réalisé, c'est que l'employé a reçu i appels dans la journée. Dans ce cas, l'expérience consiste donc en la succession de i épreuves de Bernoulli, indépendantes, et de même paramètre p (probabilité de répondre à un appel).
- La v.a.r. Y est égale au nombre de succès de cette expérience.

On en conclut que la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = i\}$ est la loi $\mathcal{B}(i, p)$.

Autrement dit : $\forall j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y = j\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i \\ \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j} & \text{si } j \leq i \end{cases}$

□

b) En déduire la loi de Y .

Démonstration.

- Tout d'abord : $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$. En effet, un nombre d'appels obtenant une réponse est forcément un entier.
- Soit $j \in \mathbb{N}$. La famille $(\{X = i\})_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événement. Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(\{Y = j\}) \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = i\}) \times \mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y = j\}) \\
 &= \sum_{i=0}^{j-1} \mathbb{P}(\{X = i\}) \times \mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y = j\}) + \sum_{i=j}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = i\}) \times \mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y = j\}) \\
 &= \sum_{i=0}^{j-1} \cancel{\mathbb{P}(\{X = i\}) \times 0} + \sum_{i=j}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = i\}) \times \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j} \quad (d'après la question précédente) \\
 &= p^j \sum_{i=j}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \binom{i}{j} (1-p)^{i-j} \quad (d'après l'énoncé) \\
 &= e^{-\lambda} p^j \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{\cancel{i!}} \times \frac{\cancel{i!}}{j!(i-j)!} (1-p)^{i-j}
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\{Y = j\}) &= e^{-\lambda} \frac{p^j}{j!} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\lambda^i (1-p)^{i-j}}{(i-j)!} \\
 &= e^{-\lambda} \frac{p^j}{j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{i+j} (1-p)^i}{i!} && (par\ décalage\ d'indice) \\
 &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^i}{i!} \\
 &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \times e^{\lambda(1-p)} \\
 &= e^{-\lambda + \lambda(1-p)} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \\
 &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^j}{j!}
 \end{aligned}$$

On en conclut : $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.

□

2. Compléter le tableau ci-contre.

	Notation et paramètres	Loi de X	Fonction génératrice	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}(X)$
Loi uniforme	$\mathcal{U}([1, n])$ $n \in \mathbb{N}^*$	$X(\Omega) = [1, n]$ $\forall k \in [1, n], \mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{1}{n}$	$\forall t \in]-\infty, +\infty[,$ $G_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{t - t^{n+1}}{1 - t} & st \neq 1 \\ 1 & st = 1 \end{cases}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{(n-1)(n+1)}{12}$
	$\mathcal{U}([a, b])$ $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ $b \geq a$	$X(\Omega) = [a, b]$ $\forall k \in [a, b], \mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{1}{b-a+1}$	$\forall t \in]-\infty, +\infty[,$ $G_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1} \frac{t^a - t^{b+1}}{1-t} & st \neq 1 \\ 1 & st = 1 \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$
Loi de Bernoulli	$\mathcal{B}(1, p)$ $p \in]0, 1[$	$X(\Omega) = \{0, 1\}$ $\mathbb{P}(\{X = 1\}) = p$ et $\mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1 - p$	$\forall t \in]-\infty, +\infty[, G_X(t) = (1-p) + pt$	p	$p(1-p)$
Loi binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$ $n \in \mathbb{N}^*$ $p \in]0, 1[$	$X(\Omega) = [0, n]$ $\forall k \in [0, n], \mathbb{P}(\{X = k\}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$\forall t \in]-\infty, +\infty[, G_X(t) = ((1-p) + pt)^n$	np	$np(1-p)$