

Interrogation 28

1. Dans un 1^{er} temps, on effectue une infinité de lancers d'une pièce non équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0, 1[$. On note alors X la v.a.r. correspondant au rang du 1^{er} Pile obtenu. On admet que la famille $(\{X = n\})_{n \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.

Dans un 2nd temps, si la v.a.r. X prend la valeur n , alors on effectue n lancers supplémentaires de la même pièce. On note alors Y le nombre de Pile obtenus lors de ces n lancers supplémentaires.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{X = n\}) = p(1-p)^{n-1}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$, car on peut obtenir le premier Pile à chaque lancer après le 1^{er}.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note :

P_i : « on obtient pile au $i^{\text{ème}}$ lancer »

F_i : « on obtient face au $i^{\text{ème}}$ lancer »

On remarque :

L'événement $\{X = n\}$ est réalisé $\Leftrightarrow$ le 1^{er} pile est obtenu au $n^{\text{ème}}$ lancer

$\Leftrightarrow$ (on obtient face au 1^{er} lancer

ET on obtient face au 2^{ème} lancer

$\vdots$

ET on obtient face au $(n-1)^{\text{ème}}$ lancer

ET on obtient pile au $n^{\text{ème}}$ lancer)

$\Leftrightarrow$ (l'événement F_1 est réalisé

ET l'événement F_2 est réalisé

$\vdots$

ET l'événement F_{n-1} est réalisé

ET l'événement P_n est réalisé)

$\Leftrightarrow$ l'événement $F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n$ est réalisé

Ainsi : $\{X = n\} = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} F_i\right) \cap P_n$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\{X = n\}) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} F_i\right) \cap P_n\right) \\
 &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(F_i)\right) \times \mathbb{P}(P_n) && (\text{car } F_1, \dots, F_{n-1}, P_n \text{ sont mutuellement indépendants (car les lancers le sont)}) \\
 &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} (1 - \mathbb{P}(P_i))\right) \times \mathbb{P}(P_n) \\
 &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} (1 - p)\right) \times p && (\text{d'après l'énoncé}) \\
 &= (1 - p)^{n-1} p
 \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{X = n\}) = (1 - p)^{n-1} p$

□

- b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{\{X=n\}}(\{Y=k\})$.
 Le résultat final fera apparaître deux cas : $k \leq n$ et $k > n$.

Démonstration.

- Si l'événement $\{X=n\}$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu le 1^{er} Pile au lancer numéro n dans la première partie de l'expérience. Dans ce cas, dans la deuxième partie de l'expérience, on lance n fois supplémentaires la même pièce.
- La deuxième partie de l'expérience consiste donc en la succession de n épreuves de Bernoulli, indépendantes, et de même paramètre p (probabilité d'obtenir Pile).
- La v.a.r. Y est égale au nombre de succès de cette expérience.

$$\text{On en conclut : } \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_{\{X=n\}}(\{Y=k\}) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} .$$

□

- c) En déduire la loi de Y .

Démonstration.

- Tout d'abord : $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$. En effet, un nombre de Pile obtenu est forcément un entier.
- Soit $k \in \mathbb{N}$.

La famille $(\{X=n\})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événement.

Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{Y=k\}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X=n\} \cap \{Y=k\}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X=n\}) \times \mathbb{P}_{\{X=n\}}(\{Y=k\}) \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \mathbb{P}(\{X=n\}) \times \mathbb{P}_{\{X=n\}}(\{Y=k\}) + \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X=n\}) \times \mathbb{P}_{\{X=n\}}(\{Y=k\}) \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \cancel{\mathbb{P}(\{X=n\}) \times 0} + \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X=n\}) \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{d'après 1a}) \\ &= p^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{2n-k-1} \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{Y=k\}) = p^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{2n-k-1}$$

□

2. Déterminer la nature des séries suivantes.

a) $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^3} \right)$

Démonstration.

- On remarque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} = 0$. D'où :

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^3} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^3}$$

Ainsi :

$$\left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^3} \right) \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left| \frac{(-1)^n}{n^3} \right| = \frac{1}{n^3}$$

- On sait alors :

$$\times \left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^3} \right) \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3} \geq 0$$

$\times$ la série $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann d'exposant 3 ($3 > 1$). Elle est donc convergente.

Par critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^3} \right)$ est absolument convergente, et donc convergente.

□

b) $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$

Démonstration.

- On remarque :

$$|\sin(n)| = O(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{}{}$$

Ainsi :

$$\left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| = \frac{|\sin(n)|}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{}{}$$

- On sait alors :

$$\times \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{}{}$$

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| \geq 0 \text{ et } \frac{1}{n^2} \geq 0$$

$\times$ la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

Par critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ est absolument convergente, et donc convergente.

□