

Interrogation 27

1. Déterminer la nature de la série $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$.

Démonstration.

- On remarque :

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^2}{2} + O \left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^3 \right) \quad (\text{car : } \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$

On note alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}$$

- Tout d'abord, la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$, est :
 - × positive,
 - × décroissante,
 - × de limite nulle.

Par critère spécial des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

- La série $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$).

La série $\sum \frac{1}{n}$ est donc divergente.

- De plus :

- × $|w_n| = O \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right)$
 - × $\forall n \in \mathbb{N}^*, |w_n| \geq 0$ et $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \geq 0$
 - × la série numérique $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}$ ($\frac{3}{2} > 1$).
- Elle est donc convergente.

Par critère de comparaison par domination des séries à termes positifs, la série $\sum w_n$ est absolument convergente, et donc convergente.

- On rappelle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + w_n$$

De plus, les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum w_n$ sont convergentes et la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

On en conclut que la série $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$ est divergente.

□

2. Déterminer la nature de la série $\sum n^2 \frac{(-1)^n}{n!}$ et calculer sa somme.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \frac{k^2 (-1)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^n \frac{(k(k-1) + k) (-1)^k}{k!} \\
 &= \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1) (-1)^k}{k!} + \sum_{k=1}^n \frac{k (-1)^k}{k!} \\
 &= \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^{k+2}}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \quad (\text{par décalages d'indices}) \\
 &= (-1)^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!}
 \end{aligned}$$

- On reconnaît des sommes partielles d'une série exponentielle de paramètre -1 , qui est convergente.

La série numérique $\sum \frac{n^2 (-1)^n}{n!}$ est donc convergente et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2 (-1)^k}{k!} = (-1)^2 e^{-1} - e^{-1} = e^{-1} - e^{-1} = 0$$

La série numérique $\sum \frac{n^2 (-1)^n}{n!}$ converge et : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2 (-1)^k}{k!} = 0$.

□

3. On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}_2[X]$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ est donné par : $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $\text{Ker}(f + 3 \text{id})$.

Démonstration.

Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$.

Alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$P \in \text{Ker}(f + 3 \text{id}) \iff (f + 3 \text{id})(P) = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$$

$$\iff (A + 3I_3)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + 2c = 0 \\ -a + 2b - 4c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} a + 2b = 0 \\ -2b + 2c = 0 \\ 4b - 4c = 0 \end{cases} \quad (*)$$

On reprend les équivalences :

$$\begin{aligned}
 (*) \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \quad & \begin{cases} a + 2b = 0 \\ -2b + 2c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ 2c = 2b \end{cases}
 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(f + 3\text{id}) &= \{a \cdot P_0 + b \cdot P_1 + c \cdot P_2 \mid a = -2b \text{ ET } c = b\} \\
 &= \{-2b \cdot P_0 + b \cdot P_1 + b \cdot P_2 \mid b \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{b \cdot (-2 \cdot P_0 + P_1 + P_2) \mid b \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}(-2 \cdot P_0 + P_1 + P_2)
 \end{aligned}$$

$$\text{Ker}(f + 3\text{id}) = \text{Vect}(-2 \cdot P_0 + P_1 + P_2)$$

Commentaire

- Ce n'était pas demandé, mais on pouvait facilement en déduire une base de l'espace vectoriel $\text{Vect}(-2 \cdot P_0 + P_1 + P_2)$.

En effet, la famille $\mathcal{F}_0 = (-2 \cdot P_0 + P_1 + P_2)$ est donc :

- × génératrice de $\text{Ker}(f + 3\text{id})$, d'après ce qui précède,
- × libre, car constituée uniquement d'un vecteur, qui est non nul.

La famille $\mathcal{F}_0 = (-2 \cdot P_0 + P_1 + P_2)$ est donc une base de $\text{Ker}(f + 3\text{id})$.

- On pouvait aussi procéder par lecture matricielle.

Tout d'abord :

- × l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie,
- × l'application $f + 3\text{id}$ est linéaire.

Par théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc}
 \dim(\mathbb{R}_2[X]) & = & \dim(\text{Ker}(f + 3\text{id})) & + & \dim(\text{Im}(f + 3\text{id})) \\
 \parallel & & & & \parallel \\
 3 & & & & \text{rg}(f + 3\text{id}) = \text{rg}(A + 3I_3)
 \end{array}$$

Or :

$$\begin{aligned}
 \text{rg}(A + 3I_3) &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \right) \\
 &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \right) \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= 2 \quad \quad \quad (\text{car } L_1 \text{ et } L_2 \text{ ne sont pas colinéaires})
 \end{aligned}$$

Commentaire

Ainsi : $\dim(\text{Ker}(f + 3\text{id})) = 3 - 2 = 1$.

De plus : $2 \cdot P_0 - P_1 - P_2 \in \text{Ker}(f + 3\text{id})$. En effet :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}((f + 3\text{id})(2 \cdot P_0 - P_1 - P_2)) = (A + 3I_3) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})}$$

La famille $\mathcal{F}_0 = (2 \cdot P_0 - P_1 - P_2)$:

× est libre, car elle est constituée uniquement d'un vecteur qui est non nul,

× vérifie : $\text{Card}(\mathcal{F}_0) = 1 = \dim(\text{Ker}(f + 3\text{id}))$.

C'est donc une base de $\text{Ker}(f + 3\text{id})$. □

b) Déterminer $\text{Im}(f)$.

Démonstration.

On sait que :

× l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie,

× l'application f est linéaire.

Par caractérisation de l'image d'une application linéaire en dimension finie :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(P_0), f(P_1), f(P_2)) \\ &= \text{Vect}(-2 \cdot P_0 + P_1 - P_2, 2 \cdot P_0 - 3 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2, 2 \cdot P_1 - 7 \cdot P_2) \quad (\text{par lecture matricielle}) \end{aligned}$$

$\text{Im}(f) = \text{Vect}(-2 \cdot P_0 + P_1 - P_2, 2 \cdot P_0 - 3 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2, 2 \cdot P_1 - 7 \cdot P_2)$

□