

Interrogation 26

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On dispose d'une urne contenant n jetons numérotés dans cette urne. On pioche au hasard un jeton dans cette urne.

Si on a pioché le jeton numéro k , alors on lance k fois une pièce équilibrée.

a) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Quelle est la probabilité de piocher le jeton numéro k ? Justifier.

Démonstration.

On note :

J_k : « on pioche le jeton numéro k »

On est en situation d'équiprobabilité.

On en déduit : $\mathbb{P}(J_k) = \frac{1}{n}$.
--

□

b) Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note :

A_j : « on a obtenu le premier Pile au $j^{\text{ème}}$ lancer »

Exprimer $\mathbb{P}(A_j)$ à l'aide d'événements élémentaires bien choisis.

Démonstration.

• Tout d'abord, on note, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

P_i : « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer »

F_i : « obtenir Face au $i^{\text{ème}}$ lancer »

• Ensuite, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

L'événement A_j est réalisé	$\Leftrightarrow$	on obtient face au 1 ^{er} lancer
	ET	on obtient face au 2 ^{ème} lancer
	$\vdots$	
	ET	on obtient face au $(j-1)^{\text{ème}}$ lancer
	ET	on obtient pile au $j^{\text{ème}}$ lancer

$\Leftrightarrow$	l'événement F_1 est réalisé
ET	l'événement F_2 est réalisé

$\vdots$

ET	l'événement F_{j-1} est réalisé
----	-----------------------------------

ET	l'événement P_j est réalisé
----	-------------------------------

$\Leftrightarrow$ l'événement $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{j-1} \cap P_j$ est réalisé

On en déduit : $A_j = \left(\bigcap_{i=1}^{j-1} F_i \right) \cap P_j$.
--

□

c) Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer $\mathbb{P}(A_j)$.

Démonstration.

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- La famille $(J_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ forme un système complet d'événements.

Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_j) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(J_k \cap A_j)$$

- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Deux cas se présentent alors :

× si $j \geq k$, alors : $J_k \cap A_j = \emptyset$ car le rang du premier Pile (j) ne peut pas être strictement supérieur au nombre de lancers effectués (k). Ainsi :

$$\mathbb{P}(J_k \cap A_j) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

× si $j \leq k$, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J_k \cap A_j) &= \mathbb{P}(J_k) \times \mathbb{P}_{J_k}(A_j) \\ &= \frac{1}{n} \times \mathbb{P}_{J_k}(A_j) && (d'après \mathbf{1.a}) \\ &= \frac{1}{n} \times \mathbb{P}_{J_k} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{j-1} F_i \right) \cap P_j \right) && (d'après \mathbf{1.b}) \\ &= \frac{1}{n} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}_{J_k}(F_i) \right) \mathbb{P}_{J_k}(P_j) && (car F_1, \dots, F_{j-1} et P_j sont mutuellement indépendants pour \mathbb{P}_{J_k}) \\ &= \frac{1}{n} \times \left(\prod_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{2} && (car la pièce lancée est équilibrée) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{2^j} \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_j) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(J_k \cap A_j) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{P}(J_k \cap A_j) + \sum_{k=j}^n \mathbb{P}(J_k \cap A_j) \\ &= \sum_{k=j}^n \frac{1}{n 2^j} && (d'après ce qui précède) \\ &= \frac{1}{n 2^j} \times (n - j + 1) \end{aligned}$$

Finalement : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(A_j) = \frac{n - j + 1}{n 2^j}$.

□

2. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit $(A_1, \dots, A_m)$ une famille finie d'événements de $\mathcal{A}$. On suppose : $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}) \neq 0$.

Énoncer la formule des probabilités composées.

Démonstration.

La formule des probabilités composées est :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}}(A_m).$$

□