

Interrogation 25

1. Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. On lance une pièce n fois d'affilée, lancers numérotés, et on s'intéresse à la séquence des côtés visibles (pile ou face).

a) Proposer un espace probabilisable permettant de modéliser l'expérience.

Démonstration.

L'univers associé à cette expérience est : $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}^n$.

On propose alors l'espace probabilisable : $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

□

b) On appelle chaîne une succession de piles, ou une succession de faces. Par exemple, pour $n = 7$, si on a obtenu la réalisation suivante :

(pile, pile, pile, pile, face, face, pile)

Alors la 1^{ère} chaîne de cette réalisation est de longueur 4, la 2^{ème} chaîne de longueur 2, la 3^{ème} chaîne de longueur 1.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_k l'événement : « la 1^{ère} chaîne est de longueur k ».

Démontrer que la famille $(A_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ forme un système complet d'événements.

Démonstration.

- Démontrons que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Supposons : $i \neq j$.

L'événements $A_i \cap A_j$ est réalisé si et seulement si la première chaîne est de longueur i et de longueur j . Or : $i \neq j$. C'est donc impossible. Ainsi :

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles.

- Démontrons : $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$.

On procède par double inclusion.

($\subset$) Comme $A_1, \dots, A_n$ sont des événements, alors : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Ainsi : $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$, i.e. : $\bigcup_{k=1}^n A_k \subset \Omega$.

($\supset$) Soit $\omega \in \Omega$.

Comme ω est un n -uplet, la longueur de la première chaîne :

est égale à 1,

OU est égale à 2,

$\vdots$

OU est égale à n .

Ainsi : $(\omega \in A_1) \text{ OU } (\omega \in A_2) \text{ OU } \dots \text{ OU } (\omega \in A_n)$.

On en déduit : $\omega \in \bigcup_{k=1}^n A_k$.

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$$

La famille $(A_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est donc un système complet d'événements.

□

c) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Décomposer l'événement A_k à l'aide d'événements élémentaires bien choisis.

Démonstration.

- Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note :

P_i : « obtenir pile au $i^{\text{ème}}$ lancer »

F_i : « obtenir face au $i^{\text{ème}}$ lancer »

- On remarque alors :

L'événement A_k est réalisé

$\Leftrightarrow$ (on obtient face au 1^{er} lancer
ET on obtient face au 2^{ème} lancer
 $\vdots$
ET on obtient face au $k^{\text{ème}}$ lancer
ET on obtient pile au $(k+1)^{\text{ème}}$ lancer)
OU (on obtient pile au 1^{er} lancer
ET on obtient pile au 2^{ème} lancer
 $\vdots$
ET on obtient pile au $k^{\text{ème}}$ lancer
ET on obtient face au $(k+1)^{\text{ème}}$ lancer)

$\Leftrightarrow$ (l'événement F_1 est réalisé
ET l'événement F_2 est réalisé
 $\vdots$
ET l'événement F_k est réalisé
ET l'événement P_{k+1} est réalisé)
OU (l'événement P_1 est réalisé
ET l'événement P_2 est réalisé
 $\vdots$
ET l'événement P_k est réalisé
ET l'événement F_{k+1} est réalisé)

$\Leftrightarrow$ l'événement $(F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}) \cup (P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1})$ est réalisé

On en déduit : $A_k = \left(\left(\bigcap_{i=1}^k F_i \right) \cap P_{k+1} \right) \cup \left(\left(\bigcap_{i=1}^k P_i \right) \cap F_{k+1} \right)$.

□