

Interrogation 24

On note $f : \mathbb{K}_2[X] \rightarrow \mathbb{K}_2[X]$.

$$P \mapsto 2X P(X) - (X^2 - 1) P'(X)$$

On note $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

1. Calculer $f(P_0)$, $f(P_1)$ et $f(P_2)$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $f(P_0)(X) = 2X \times 1 - (X^2 - 1) \times 0_{\mathbb{K}_2[X]} = 2X$.

$$f(P_0) = 2 \cdot P_1$$

- Ensuite : $f(P_1)(X) = 2X \times X - (X^2 - 1) \times 1 = X^2 + 1$

$$f(P_1) = P_0 + P_2$$

- Enfin : $f(P_2)(X) = 2X \times X^2 - (X^2 - 1) \times 2X = 2X$

$$f(P_2) = 2 \cdot P_1$$

□

2. Montrer que f est endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$.

Démonstration.

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}_2[X])^2$.
Alors il existe $(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$Q_1 = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \quad \text{et} \quad Q_2 = b_0 \cdot P_0 + b_1 \cdot P_1 + b_2 \cdot P_2$$

$$f(\lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2)$$

$$= 2X (\lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2)(X) + (X^2 - 1) (\lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2)'(X)$$

$$= 2X (\lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2)(X) + (X^2 - 1) (\lambda_1 \cdot Q_1' + \lambda_2 \cdot Q_2')(X)$$

(par linéarité de la dérivation)

$$= \lambda_1 \cdot (2X Q_1(X) - (X^2 - 1) Q_1'(X)) + \lambda_2 \cdot (2X Q_2(X) - (X^2 - 1) Q_2'(X))$$

(par linéarité de l'évaluation en X)

$$= (\lambda_1 \cdot f(P_1) + \lambda_2 \cdot f(P_2))(X)$$

L'application f est donc linéaire.

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathbb{K}_2[X]$.
× D'après la question précédente : $\forall k \in [0, 2], f(P_k) \in \mathbb{K}_2[X]$.
× Comme f est linéaire, alors : $\forall P \in \mathbb{K}_2[X], f(P) \in \mathbb{K}_2[X]$.

Ainsi, l'application f est à valeurs dans $\mathbb{K}_2[X]$.

Finalement, l'application f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$.

□

3. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$.

Alors il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.

$$\begin{aligned}
 P \in \text{Ker}(f) &\iff f(P) = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \\
 &\iff 2XP(X) - (X^2 - 1)P'(X) = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \\
 &\iff 2X(a_0 + a_1X + a_2X^2) - (X^2 - 1)(a_1 + 2a_2X) = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \\
 &\iff a_1 + (2a_0 + 2a_2)X + a_1X^2 = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \\
 &\iff \begin{cases} a_1 = 0 \\ 2a_0 + 2a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{car } (1, X, X^2) \text{ est libre}) \\
 L_1 \leftrightarrow L_2 &\iff \begin{cases} a_0 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \\
 L_3 \leftarrow L_3 - L_2 &\iff \begin{cases} a_0 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a_0 = -a_2 \\ a_1 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

- On obtient :

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(f) &= \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{K}_2[X] \mid a_0 = -a_2 \text{ ET } a_1 = 0\} \\
 &= \{-a_2 \cdot P_0 + a_2 \cdot P_2 \mid a_2 \in \mathbb{K}\} \\
 &= \{a_2 \cdot (-P_0 + P_2) \mid a_2 \in \mathbb{K}\} \\
 &= \text{Vect}(-P_0 + P_2)
 \end{aligned}$$

- La famille $\mathcal{F} = (-P_0 + P_2)$ est :
 - × génératrice de $\text{Ker}(f)$, d'après ce qui précède,
 - × libre, car elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires.

La famille $\mathcal{F}$ est donc une base de $\text{Ker}(f)$, et :
 $\dim(\text{Ker}(f)) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 1$

□

4. Déterminer la dimension de $\text{Im}(f)$ (sans déterminer $\text{Im}(f)$).

Démonstration.

On sait que :

- × l'espace vectoriel $\mathbb{K}_2[X]$ est de dimension finie,
- × l'application f est linéaire, d'après 2.

Par théorème du rang :

$$\begin{aligned}
 \dim(\mathbb{K}_2[X]) &= \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \\
 \parallel &\qquad \qquad \parallel \\
 3 &\qquad \qquad 1
 \end{aligned}$$

On en déduit : $\dim(\text{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$.

□

5. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

Démonstration.

- On sait que :
 - × l'espace vectoriel $\mathbb{K}_2[X]$ est de dimension finie,
 - × l'application f est linéaire.

Par caractérisation de l'image d'une application linéaire en dimension finie :

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(P_0), f(P_1), f(P_2)) \\ &= \text{Vect}(2 \cdot P_1, P_0 + P_2, \cancel{2 \cdot P_1}) \quad (d'après \textbf{1.}) \\ &= \text{Vect}(P_1, P_0 + P_2)\end{aligned}$$

- La famille $\mathcal{G} = (P_1, P_0 + P_2)$:
 - × est génératrice de $\text{Im}(f)$, d'après ce qui précède,
 - × vérifie : $\text{Card}(\mathcal{G}) = 2 = \dim(\text{Im}(f))$.

Ainsi, $(P_1, P_0 + P_2)$ est une base de $\text{Im}(f)$.

□

6. L'application f est-elle bijective ?

Démonstration.

On remarque : $\text{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{K}_2[X]}\}$. L'application linéaire f n'est donc pas injective.

On en déduit que l'application f n'est pas bijective.

□