

Interrogation 23

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Supposons : $a < b$. Énoncer le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Démonstration.

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$.

Le théorème de convergence des sommes de Riemann est :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(t) dt$$

□

2. Démontrer que la fonction H suivante est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

$$\begin{aligned} H &:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_x^{x^3} \frac{e^t}{t} dt \end{aligned}$$

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction $f : t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Elle admet donc une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

- Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$H(x) = \int_x^{x^3} \frac{e^t}{t} dt = [F(t)]_x^{x^3} = F(x^3) - F(x)$$

- La fonction $g : x \mapsto F(x^3)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, car elle est la composée $g = F \circ g_1$ de :

$\times g_1 : x \mapsto x^3$ qui :

- est dérivable sur $]0, +\infty[$,
- vérifie : $g_1(]0, +\infty[) \subset]0, +\infty[$,

$\times F$ qui est dérivable (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $]0, +\infty[$.

De plus, la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que la fonction H est dérivable sur $]0, +\infty[$.

- Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} H'(x) &= 3x^2 \times F'(x^3) - F'(x) \\ &= 3x^2 f(x^3) - f(x) && \text{(car } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &= 3x^2 \frac{e^{x^3}}{x^3} - \frac{e^x}{x} \\ &= 3 \frac{e^{x^3}}{x} - \frac{e^x}{x} \end{aligned}$$

Finalement : $\forall x \in]1, +\infty[, H'(x) = 3 \frac{e^{x^3}}{x} - \frac{e^x}{x}$.

□

3. Démontrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2 (k^3 + n^3)^{\frac{1}{3}}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2 (k^3 + n^3)^{\frac{1}{3}}} &= \sum_{k=1}^n \frac{\left(n \frac{k}{n}\right)^2}{n^2 \left(\left(n \frac{k}{n}\right)^3 + n^3\right)^{\frac{1}{3}}} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{\cancel{n^2} \left(\frac{k}{n}\right)^2}{\cancel{n^3} \left(n^3 \left(\frac{k}{n}\right)^3 + n^3\right)^{\frac{1}{3}}} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{n \left(\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 1\right)^{\frac{1}{3}}} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\left(\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 1\right)^{\frac{1}{3}}} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \left(\text{en notant } f : x \mapsto \frac{x^2}{(x^3 + 1)^{\frac{1}{3}}}\right)
 \end{aligned}$$

- La fonction f est continue sur $[0, 1]$. La suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2 (k^3 + n^3)^{\frac{1}{3}}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc convergente et :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2 (k^3 + n^3)^{\frac{1}{3}}} &= \int_0^1 f(t) \, dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^2}{(x^3 + 1)^{\frac{1}{3}}} \, dx \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{-\frac{1}{3} + 1} (x^3 + 1)^{-\frac{1}{3} + 1} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{2}}{2} \left(2^{\frac{2}{3}} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

Enfinement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2 (k^3 + n^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2} \left(2^{\frac{2}{3}} - 1 \right).$

□