

Interrogation 22

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Donner son développement de Taylor à l'ordre n en -1 .

Démonstration.

Le développement de la fonction f à l'ordre n en -1 est :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(-1)}{k!} (x+1)^k + o_{x \rightarrow -1}((x+1)^n)$$

□

2. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Démontrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On admet que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ car elle est le quotient $g = \frac{g_1}{g_2}$ de :
 - × $g_1 : x \mapsto \cos(x) - 1$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$,
 - × $g_2 : x \mapsto x^2$ qui :
 - est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$,
 - NE S'ANNULE PAS sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

- La fonction g :
 - × est continue sur $\mathbb{R}$, d'après l'énoncé,
 - × est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, d'après ce qui précède,
 - × vérifie : $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$g'(x) = \frac{-\sin(x) \times x^2 - (\cos(x) - 1) \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{-x \sin(x) - 2(\cos(x) - 1)}{x^3}$$

De plus :

$$\begin{aligned} & -x \sin(x) - 2(\cos(x) - 1) \\ &= -x \left(x - \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \right) - 2 \left(\cancel{x} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) - \cancel{x} \right) \\ &= -\cancel{x^2} + \frac{x^4}{6} + \cancel{x^2} - \frac{x^4}{12} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \\ &= \frac{x^4}{12} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$g'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^4}{12}}{x^3} = \frac{x}{12} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Par théorème de la limite de la dérivée, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

□

3. On considère un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de mains de 5 cartes qui comportent 2 paires distinctes, mais pas un full ?

Une paire est constitué de 2 cartes de même hauteur.

Un full est constitué de 5 cartes : 3 à une même hauteur, et 2 à une même hauteur.

Démonstration.

Une main de 5 cartes qui comporte 2 paires (mais pas un full) est entièrement déterminée par :

- × la hauteur des deux paires : $\binom{8}{2}$ possibilités,
- × la couleur des cartes d'une des deux paires : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités,
- × la couleur des cartes de l'autre paire : $\binom{4}{2} = 6$,
- × la valeur de la 5^{ème} carte de la main (qui n'est pas de la même hauteur que les cartes précédentes pour ne pas avoir de full) : $\binom{24}{1} = 24$ possibilités.

Il y a donc $\binom{8}{2} \times 6^2 \times 24$ mains comportant deux paires (mais pas de full).

□

4. On note $E = \mathbb{K}_2[X]$, $F = \text{Vect}(X + 1, X - 2)$ et $G = \text{Vect}(X^2)$.

Démontrer : $E = F \oplus G$.

Démonstration.

On note :

- × $\mathcal{F} = (X + 1, X - 2)$,
- × $\mathcal{G} = (X^2)$,
- × $\mathcal{B} = (X + 1, X - 2, X^2)$.

- La famille $\mathcal{F}$ est :

- × génératrice de F , par définition de F ,
- × libre, car constituée de 2 vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de F .

- La famille $\mathcal{G}$ est :

- × génératrice de G , par définition de G ,
- × libre, car constituée uniquement d'un vecteur, qui est non nul.

C'est donc une base de G .

- Démontrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$.

Supposons :

$$\lambda_1 \cdot (X + 1) + \lambda_2 \cdot (X - 2) + \lambda_3 \cdot X^2 = 0_{\mathbb{K}_2[X]} \quad (*)$$

On remarque :

$$(*) \iff (\lambda_1 - 2\lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot X + \lambda_3 \cdot X^2 = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(car la famille } (1, X, X^2) \\ \text{est libre)} \end{array}$$

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 &= 0 \\ &3\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{(par remontées} \\ \text{successives)} \end{array}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est libre.

- La famille $\mathcal{B}$:

× est libre,

× vérifie : $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{K}_2[X])$.

La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathbb{K}_2[X] = E$.

- On en déduit que la concaténation de la base $\mathcal{F}$ de F et de la base $\mathcal{G}$ de G est une base de E .
Ainsi : $E = F \oplus G$.

□