

Interrogation 21

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \dots, e_p) \in E^p$.
Quelle est la définition de la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre ?

Démonstration.

La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \left(\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot e_k = 0_E \right) \Rightarrow (\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_k = 0) \right) \quad \square$$

2. Démontrer que la fonction f suivante admet une asymptote oblique en $+\infty$ et déterminer la position relative du graphe de f et de cette asymptote.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right) \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Démonstration.

- On remarque :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(\frac{1}{x}\right) \sqrt{x^2 + 1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2!} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \times x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} && (car : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0) \\ &= x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) && (car : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0) \\ &= \left(x + 1 + \frac{1}{2x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{2x^2} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x + 1 + \frac{1}{2x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x + 1 + \frac{1}{x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$f(x) - (x + 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

- On en conclut :

× d'une part, comme deux fonctions équivalentes en un point ont même limite en ce point :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$.

Ainsi, la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

× d'autre part :

$$f(x) - (x + 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} > 0$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est située au-dessus de la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

□

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Démonstration.

Démontrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Tout d'abord : $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, par définition de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
- De plus : $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$. En effet : $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, car :

$$0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}^T = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} = -0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$$

- Enfin, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(M_1, M_2) \in (\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))^2$.

Démontrons : $\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2)^T &= \lambda_1 \cdot M_1^T + \lambda_2 \cdot M_2^T && \text{(par linéarité de la transposition)} \\ &= \lambda_1 \cdot (-M_1) + \lambda_2 \cdot (-M_2) && \text{(car : } (M_1, M_2) \in (\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))^2 \text{)} \\ &= -(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) \end{aligned}$$

Ainsi : $\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

L'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et donc un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. □

4. Démontrer que l'ensemble $F = \{(a+b) + (a-b)X \mid (a,b) \in \mathbb{K}^2\}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et en déterminer une base.

Démonstration.

On remarque :

$$\begin{aligned} F &= \{(a+b) + (a-b)X \mid (a,b) \in \mathbb{K}^2\} \\ &= \{a \cdot (1+X) + b \cdot (1-X) \mid (a,b) \in \mathbb{K}^2\} \\ &= \text{Vect}(1+X, 1-X) \end{aligned}$$

La famille $(1+X, 1-X)$ est donc :

- × génératrice de F , d'après ce qui précède,
- × libre, car elle est constituée de 2 vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de F .

La famille $(1+X, 1-X)$ est une base de F . □

5. Démontrer que la famille $((1, 0, -1), (2, 1, 1), (0, 1, -1))$ est une famille libre de $\mathbb{K}^3$.

Démonstration.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$.

Supposons :

$$\lambda_1 \cdot (1, 0, -1) + \lambda_2 \cdot (2, 1, 1) + \lambda_3 \cdot (0, 1, -1) = 0_{\mathbb{K}^3} \quad (*)$$

On remarque :

$$(*) \iff (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \} \quad (\text{par remontées successives})$$

Ainsi : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

La famille $((1, 0, -1), (2, 1, 1), (0, 1, -1))$ est donc une famille libre de $\mathbb{K}^3$.

□