

Interrogation 20

1. Énoncer l'une des versions de l'inégalité des accroissements finis.

Démonstration.

Au choix.

- Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \text{ continue sur } [a, b] \\ \bullet f \text{ dérivable sur }]a, b[\\ \bullet \text{ il existe } m \text{ et } M \text{ tels que } \\ \quad \forall u \in]a, b[, m \leq f'(u) \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

- Soit I un intervalle.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \text{ dérivable sur un intervalle } I \\ \bullet \text{ il existe } M \geq 0, \\ \quad \forall u \in I, |f'(u)| \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2, \\ |f(y) - f(x)| \leq M |y - x| \end{array}$$

- Soit I un intervalle.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ dérivable sur un intervalle } I \\ |f'| \text{ majorée par } M \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ est } M\text{-lipschitzienne}$$

□

2. Calculer le développement limité à l'ordre 6 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x) - x}{1 - x}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x) - x}{1 - x} &= (\sin(x) - x) \times \frac{1}{1 - x} \\ &= \left(-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o_{x \rightarrow 0}(x^6) \right) \left(1 + x + x^2 + x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \right) \\ &= -\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} - \frac{x^6}{6} \\ &\quad + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{5!} + o_{x \rightarrow 0}(x^6) \\ &= -\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} - \frac{19}{120}x^5 - \frac{19}{120}x^6 + o_{x \rightarrow 0}(x^6) \end{aligned}$$

□

3. Démontrer que la fonction f suivante admet une asymptote oblique en $+\infty$ et déterminer la position relative du graphe de f et de cette asymptote.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right) \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Démonstration.

- On remarque :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(\frac{1}{x}\right) \sqrt{x^2 + 1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2!} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \times x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} && (car : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0) \\ &= x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) && (car : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0) \\ &= \left(x + 1 + \frac{1}{2x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{2x^2} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x + 1 + \frac{1}{2x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x + 1 + \frac{1}{x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$f(x) - (x + 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

- On en conclut :

× d'une part, comme deux fonctions équivalentes en un point ont même limite en ce point :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0.$$

Ainsi, la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

× d'autre part :

$$f(x) - (x + 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} > 0$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est située au-dessus de la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

□