

Interrogation 1



On portera la plus grande attention à l'introduction des variables utilisées, *i.e.* à la quantification.

1. Quel est le thème de Français-Philosophie de cette année ?

Démonstration.

Le thème 2025/2026 de Français-Philosophie est : Expériences de la nature.

□

2. Quelles sont les oeuvres au programme de cette année en Français-Philosophie ?

Démonstration.

Les oeuvres au programme 2025/2026 de Français-Philosophie sont :

- La connaissance de la vie, Georges Canguilhem,
- Vingt mille lieues sous les mers, Jules Verne,
- Le mur invisible, Marlen Haushofer.

□

3. Énoncer les lois de De Morgan.

Démonstration.

Soient p et q deux propositions mathématiques.

- $\text{NON}(p \text{ ET } q) \Leftrightarrow \text{NON}(p) \text{ OU } \text{NON}(q)$
- $\text{NON}(p \text{ OU } q) \Leftrightarrow \text{NON}(p) \text{ ET } \text{NON}(q)$

□

4. Soient p et q deux propositions. Donner la négation de $(p \Rightarrow q)$.

Démonstration.

La négation de $(p \Rightarrow q)$ est : $p \text{ ET } \text{NON}(q)$.

□

5. Énoncer la formule du binôme de Newton.

Démonstration.

La formule du binôme de Newton est :

$$\text{forall}(a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

□

6. Écrire avec des quantificateurs « la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ ».

Démonstration.

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$

□

7. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Pour la proposition $P(x, y)$, déterminer, en justifiant, si la proposition $Q(x, y)$ est nécessaire, suffisante, les deux à la fois, ou rien du tout.

$$P(x, y) : (x^2 - y^2 = 0) \quad \text{et} \quad Q(x, y) : (x = y)$$

Démonstration.

- Étudions l'implication directe : $P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$.

On note : $x_0 = 2$ et $y_0 = -2$. On remarque :

× d'une part : $x_0^2 - y_0^2 = 2^2 - (-2)^2 = 4 - 4 = 0$.

D'où : $P(x_0, y_0)$.

× d'autre part : $x_0 \neq y_0$.

D'où : $\text{NON}(Q(x_0, y_0))$.

On a démontré : $P(x_0, y_0)$ ET $\text{NON}(Q(x_0, y_0))$.

La proposition $P(x, y)$ n'est donc pas une condition suffisante à $Q(x, y)$.

- Étudions l'implication réciproque : $P(x, y) \Leftarrow Q(x, y)$.

Supposons $Q(x, y)$. Alors : $x = y$.

On en déduit : $x^2 = y^2$. Donc : $x^2 - y^2 = 0$. D'où : $P(x, y)$.

La condition $P(x, y)$ est donc une condition nécessaire à $Q(x, y)$.

□

8. a) Écrire avec des quantificateurs « l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$ ».

Démonstration.

L'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$

□

- b) Écrire la négation de la proposition précédente.

Démonstration.

La négation de la proposition précédente est : $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0$.

□

9. a) Écrire avec des quantificateurs « Tout nombre réel positif est inférieur ou égal à son carré »

Démonstration.

Tout nombre réel positif est inférieur ou égal à son carré $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+, x \leq x^2$

□

- b) La proposition précédente est-elle vraie ? Justifier.

Démonstration.

On note : $x_0 = \frac{1}{2}$. Alors :

× d'une part : $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}_+$

× d'autre part : $\frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

La proposition précédente est donc fausse.

□