

Interrogation 19



On portera la plus grande attention à l'introduction des variables utilisées, *i.e.* à la quantification.

1. Donner les développements limités en 0 des fonctions suivantes à tout ordre.

e^x	$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
$\sin(x)$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$
$\tan(x)$	$= x + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$
$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$= 1 - \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{(-1)^n \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times (\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ $= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
$\arctan(x)$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$

2. Énoncer le théorème des accroissements finis.

Démonstration.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \text{ continue sur } [a, b] \\ \bullet f \text{ dérivable sur }]a, b[\end{array} \right\} \Rightarrow \text{il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

3. Démontrer que la fonction f suivante est dérivable en 0 :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x \sin(x)}{2 \ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\tau_0(f)(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x \sin(x)}{2 \ln(1+x)} - 0}{x} = \frac{\sin(x)}{2 \ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, la fonction $\tau_0(f)$ admet une limite finie en 0 (qui vaut 1).

La fonction f est donc dérivable en 0 et : $f'(0) = \frac{1}{2}$.

□

4. Déterminer les racines carrées du complexes $1 - 3i$.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

• Supposons : $z^2 = 1 - 3i$.

× D'une part : $|z^2| = |1 - 3i| = \sqrt{10}$. Donc :

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = \sqrt{10} \quad (1)$$

× De plus, comme $z^2 = 1 - 3i$, alors :

$$1 - 3i = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

Par unicité de l'écriture algébrique, on en déduit :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 & (2) \\ 2xy = -3 & (*) \end{cases}$$

× D'après (1) et (2), on obtient :

$$(S) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{10} \end{cases}$$

Or :

$$(S) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2y^2 = \sqrt{10} - 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2} \begin{cases} 2x^2 = \sqrt{10} + 1 \\ 2y^2 = \sqrt{10} - 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{10} + 1}{2}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{\sqrt{10} + 1}{2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{10} - 1}{2}} \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{\frac{\sqrt{10} - 1}{2}}$$

× Or, d'après (*) : $xy = -\frac{3}{2} < 0$. On note alors :

$$z_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{10} + 1}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{10} - 1}{2}}$$

On conclut :

$$z = z_0 \quad \text{ou} \quad z = -z_0$$

• Les complexes z_0 et $-z_0$ sont donc les seules solutions possibles de l'équation $z^2 = 1 - 3i$. Or cette équation complexe admet exactement deux solutions.

On en déduit que l'ensemble des solutions de $z^2 = 1 - 3i$ est :

$$\{z_0, -z_0\}$$

□