

Interrogation 18



On portera la plus grande attention à l'introduction des variables utilisées, i.e. à la quantification.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Compléter les équivalences suivantes :

a) avec des relations de divisibilité.

$$\alpha \text{ racine d'ordre au moins } m \text{ de } P \quad \Leftrightarrow \quad (X - \alpha)^m \mid P(X)$$

b) avec des relations sur des dérivées.

$$\alpha \text{ racine d'ordre } m \text{ de } P \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0 \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

2. Énoncer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration.

Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

Supposons : $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

□

3. Effectuer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $F(X) = \frac{2X-1}{(X-2)(X+3)X}$.

Démonstration.

On remarque :

$$F(X) = \frac{3}{10(X-2)} - \frac{7}{15(X+3)} + \frac{1}{6X}$$

□

4. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme Q défini par : $Q(X) = X^6 + 2$.

Démonstration.

- Soit $z \in \mathbb{C}$.

Alors il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que : $z = r e^{i\theta}$.

$$\begin{aligned}
 z \text{ racine de } Q &\Leftrightarrow z^6 = -2 \\
 &\Leftrightarrow (r e^{i\theta})^6 = 2 e^{i\pi} \\
 &\Leftrightarrow r^6 e^{6i\theta} = 2 e^{i\pi} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} r^6 = 2 \\ 6\theta \equiv \pi \pmod{2\pi} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{6}} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, 6\theta = \pi + 2k\pi \end{cases} \quad (\text{par injectivité de } x \mapsto x^6 \text{ sur } \mathbb{R}_+) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{6}} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2^{\frac{1}{6}} e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3})} \\
 &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket, z = 2^{\frac{1}{6}} e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3})} \quad (\text{par } 2\pi\text{-périodicité de } t \mapsto e^{it})
 \end{aligned}$$

La factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$ est donc :

$$Q(X) = (X - 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{6}}) (X - 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{2}}) (X - 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{5\pi}{6}}) (X - 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{7\pi}{6}}) (X - 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{3\pi}{2}}) (X - 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{11\pi}{6}}).$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
 &Q(X) \\
 &= (X - 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{6}}) (X - 2^{\frac{1}{6}} i) (X - 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{5\pi}{6}}) (X - 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{7\pi}{6}}) (X + 2^{\frac{1}{6}} i) (X - 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{11\pi}{6}}) \\
 &= (X - 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{6}}) (X - 2^{\frac{1}{6}} i) (X - 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{5\pi}{6}}) (X - 2^{\frac{1}{6}} e^{-i\frac{5\pi}{6}}) (X + 2^{\frac{1}{6}} i) (X - 2^{\frac{1}{6}} e^{-i\frac{\pi}{6}}) \\
 &= (X^2 - 2^{\frac{1}{6}} (e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}) X + 2^{\frac{1}{3}}) (X^2 + 2^{\frac{1}{3}}) (X^2 - 2^{\frac{1}{6}} (e^{i\frac{5\pi}{6}} + e^{-i\frac{5\pi}{6}}) X + 2^{\frac{1}{3}}) \\
 &= (X^2 - 2^{\frac{1}{6}} \times 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) X + 2^{\frac{1}{3}}) (X^2 + 2^{\frac{1}{3}}) (X^2 - 2^{\frac{1}{6}} \times 2 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) X + 2^{\frac{1}{3}}) \quad (\text{par formule d'Euler})
 \end{aligned}$$

La factorisation de Q dans $\mathbb{R}[X]$ est donc :

$$Q(X) = (X^2 - 2^{\frac{1}{6}} \sqrt{3} X + 2^{\frac{1}{3}}) (X^2 + 2^{\frac{1}{3}}) (X^2 + 2^{\frac{1}{6}} \sqrt{3} X + 2^{\frac{1}{3}}).$$

□