

Interrogation 17



On portera la plus grande attention à l'introduction des variables utilisées, *i.e.* à la quantification.

1. Énoncer la formule de Taylor polynomiale.

Démonstration.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

□

2. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Compléter la formule suivante :

$$(P \times Q)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \cdot P^{(k)} \times Q^{(p-k)}$$

3. On note $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $E_\lambda(A)$ l'ensemble défini par :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda \cdot X\}$$

Déterminer $E_3(A)$.

Démonstration.

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} X \in E_3(A) &\iff AX = 3 \cdot X \\ &\iff (A - 3 \cdot I_3) X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \iff \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x = y + z \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E_3(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid x = -y - z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{K}^2 \right\} \\ &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{K}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

□

4. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Démonstration.

On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\begin{cases} L_2 \leftarrow 4L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{cases}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -4 & 12 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite de Gauss obtenue est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Elle est donc inversible, et donc A aussi.

On effectue les opérations $\begin{cases} L_1 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 14 & -36 & -6 \\ 2 & -4 & -2 \\ -4 & 12 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 16 & -40 & -8 \\ 2 & -4 & -2 \\ -4 & 12 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On en déduit : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$.

□