

Interrogation 16



On portera la plus grande attention à l'introduction des variables utilisées, *i.e.* à la quantification.

1. Énoncer le théorème du binôme de Newton matriciel.

Démonstration.

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

Supposons que les matrices A et B commutent, *i.e.* : $A \times B = B \times A$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot A^k \times B^{n-k}$$

□

2. On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $(A + B)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- On en déduit :

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 4 \\ -7 & -2 & 17 \\ -7 & 2 & 20 \end{pmatrix}$$

□

3. On considère la matrice A de la question précédente.

- a) Déterminer A^T .

Démonstration.

On remarque : $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

□

- b) La matrice A est-elle antisymétrique ? Justifier.

Démonstration.

La matrice A n'est pas antisymétrique, car : $[A]_{1,1} \neq 0$.

□

4. Résoudre le système $\begin{cases} 4x - 2y - z = 0 \\ 2x - y - 7z = 0 \\ -6x + 3y - 5z = 0 \end{cases}$

Démonstration.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$.

$$\begin{cases} 4x - 2y - z = 0 \\ 2x - y - 7z = 0 \\ -6x + 3y - 5z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1, L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_1] \begin{cases} 4x - 2y - z = 0 \\ -13z = 0 \\ -13z = 0 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2] \begin{cases} 4x - 2y - z = 0 \\ -13z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow \begin{cases} 4x - z = 2y \\ -13z = 0 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow -\frac{1}{13}L_2] \begin{cases} 4x - z = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_2] \begin{cases} 4x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est donc :

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid y = 2x \text{ ET } z = 0\} &= \{(x, 2x, 0) \mid x \in \mathbb{K}\} \\ &= \{x \cdot (1, 2, 0) \mid x \in \mathbb{K}\} \\ &= \text{Vect}((1, 2, 0)) \end{aligned}$$

□