

Interrogation 15

1. Déterminer le PGCD des nombres 1638 et 308 :

a) par algorithme d'Euclide.

Démonstration.

- On effectue la division euclidienne de 1638 par 308.

$$\begin{cases} 1638 = 308 \times 5 + 98 \\ 0 \leq 98 < 308 \end{cases}$$

- On effectue la division euclidienne de 308 par 98.

$$\begin{cases} 308 = 98 \times 3 + \boxed{14} \\ 0 \leq 14 < 98 \end{cases}$$

- On effectue la division euclidienne de 98 par 14.

$$\begin{cases} 98 = 14 \times 7 + 0 \\ 0 \leq 0 < 14 \end{cases}$$

Par algorithme d'Euclide : $1638 \wedge 308 = 14$. □

b) par décomposition de ces entiers en facteurs premiers.

Démonstration.

On remarque :

- d'une part : $1638 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 13$.
- d'autre part : $308 = 2^2 \times 7 \times 11$.

On en déduit : $1638 \wedge 308 = 2^1 \times 3^0 \times 7^1 \times 11^0 \times 13^0 = 2 \times 7 = 14$. □

2. Démontrer que la fonction f suivante est continue sur $[0, +\infty[$.

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{\ln(1 + \sqrt{x})} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

La fonction f est continue :

- sur $]0, +\infty[$, car elle est le quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$ de :

× $f_1 : x \mapsto \frac{1}{1+x} - 1$ qui est continue sur $]0, +\infty[$,

× $f_2 : x \mapsto \ln(1 + \sqrt{x})$ qui :

- est continue sur $]0, +\infty[$,
- ne s'annule pas sur cet intervalle.

- en 0. En effet, comme $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{\ln(1 + \sqrt{x})} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x}{\sqrt{x}} = -\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

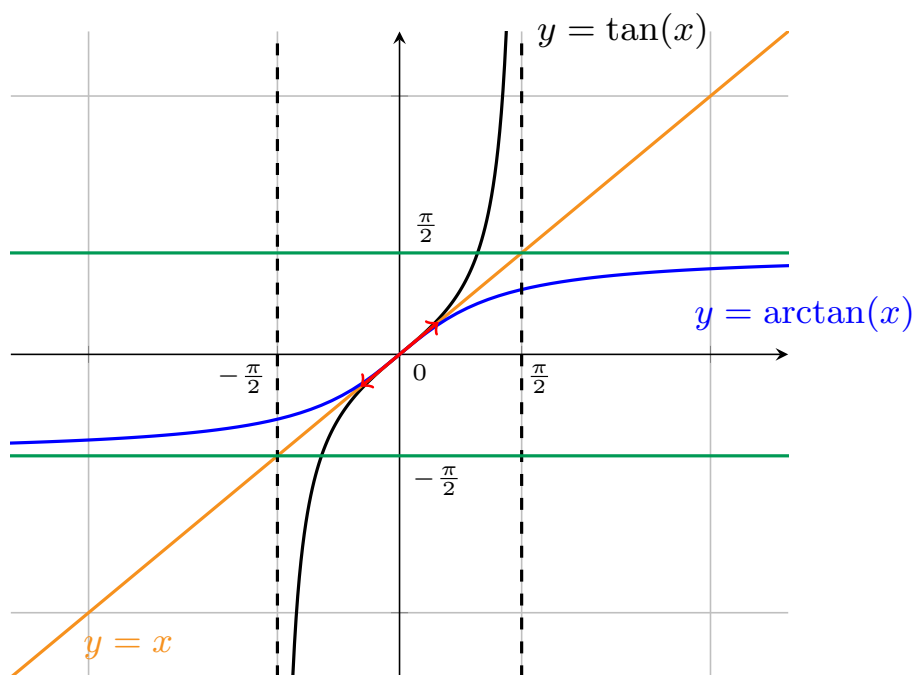
Or deux fonctions équivalentes en un point ont même limite en ce point. On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

On en conclut que la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. □

3. Tracer sur un même graphe les courbes représentatives de $\tan$ $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\arctan$.

Démonstration.



□