

Interrogation 14

1. Compléter le tableau suivant.

$\tan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}, \text{ car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
$\sin(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2, \text{ car : } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$
$\sin(x+1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin(1), \text{ car } \sin \text{ est continue en } 1 \text{ et : } \sin(1) \neq 0$
$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}{2} = -\frac{1}{2x}, \text{ car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x, \text{ car : } \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$
$\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x-1, \text{ car : } \forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(x) = \ln(1+(x-1)) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0$
$e^{\frac{1}{x^2}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}, \text{ car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
$e^{-x^2} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -1, \text{ car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} - 1 = -1 \text{ et } -1 \neq 0$
$e^{-x^2} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2, \text{ car : } \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$
$\sqrt{1-x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}(-x) = -\frac{1}{2}x, \text{ car : } \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2}x$
$8x^3 - 2x + 7 \ln(x) - 5e^{3x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -5e^{3x}, \text{ car, par croissances comparées :}$ $8x^3 - 2x + 7 \ln(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(-5e^{3x})$
$\arcsin(e^x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} e^x, \text{ car : } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
$\arctan(3x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 3x, \text{ car : } \lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$
$\operatorname{ch}(\sqrt{x}) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{(\sqrt{x})^2}{2} = \frac{x}{2}, \text{ car : } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$

2. On note f la fonction définie sur par :

$$f : [-1, \sqrt{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{\sqrt{1-\cos(x^2)}} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Démontrer que la fonction f est continue sur $[-\pi, \pi]$.

Démonstration.

La fonction f est continue :

- sur $[-1, 0[$ et sur $]0, \sqrt{\pi}]$ car elle est le quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$ de :
 $\times f_1 : x \mapsto (\sqrt{1+x}-1)^2$ qui est continue sur $[-1, 0[$ et sur $]0, \sqrt{\pi}]$,
 $\times f_2 : x \mapsto \sqrt{1-\cos(x^2)}$ qui :
- est continue sur $[-1, 0[$ et sur $]0, \sqrt{\pi}]$,
- ne s'annule pas sur ces intervalles.
- en 0. En effet, comme $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{\sqrt{1-\cos(x)}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{\sqrt{\frac{(x^2)^2}{2}}} = \frac{\cancel{x^2}^{\cancel{2}}}{\cancel{x^2}^{\cancel{2}} \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Or deux fonctions équivalentes en un point ont même limite en ce point. On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = f(0)$$

Finalement, la fonction f est continue sur $[-1, \sqrt{\pi}]$.

□