

Interrogation 13

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $(a, \ell) \in \mathbb{R}^2$. Écrire la définition (quantifiée bien sûr) de « la fonction f admet ℓ pour limite en a ».

Démonstration.

La fonction f admet ℓ pour limite en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

□

2. Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$. Donner la définitions de « les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes ».

Démonstration.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

- × la suite (u_n) est croissante,
- × la suite (v_n) est décroissante,
- × $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$.

□

3. Déterminer un équivalent de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}$. En déduire la limite de cette suite.

Démonstration.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on obtient :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\cancel{-\frac{1}{n}}}{\frac{1}{2} \times \frac{\cancel{1}}{\cancel{n}}} = -\frac{1}{2}$$

Or, deux suites équivalentes ont même limite. On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{1}{2}$.

□

4. On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(2 + u_n) \end{cases}$.

Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \ln(2)$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \begin{cases} \text{le réel } u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \geq \ln(2) \end{cases}$.

► **Initialisation :**

D'après l'énoncé : $u_0 = 2 \geq \ln(2)$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $\begin{cases} \text{le réel } u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} \geq \ln(2) \end{cases}$)

- Par hypothèse de récurrence, le réel u_n est bien défini et : $u_n \geq \ln(2)$.

On en déduit : $2 + u_n \geq 2 + \ln(2) > 0$. Ainsi, $\ln(2 + u_n)$ est bien défini, et donc u_{n+1} aussi.

- De plus :

$$u_n \geq \ln(2) \geq 0$$

$$\text{donc } 2 + u_n \geq 2$$

$$\text{d'où } \ln(2 + u_n) \geq \ln(2) \quad (\text{par croissance de la fonction } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)$$

On en déduit :

$$u_{n+1} \geq \ln(2)$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$. □

5. Démontrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right)$$

- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$, alors :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

Ainsi :

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \cancel{n} \times \frac{1}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}$$

Or, deux suites équivalentes ont même limite, ainsi :

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

Par continuité de la fonction $\exp$ en $\frac{1}{2}$, on en conclut :

$$\exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{2}\right)$$

||

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$$

Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. □