

Interrogation 12

1. Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in \mathbb{K}$. Donner la définition quantifiée de « la suite (u_n) converge vers ℓ ».

Démonstration.

La définition quantifiée de « la suite (u_n) converge vers ℓ » :
 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$

□

2. On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} - 1 \end{cases}$.

Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \begin{cases} u_n \text{ bien défini} \\ u_n \geq 0 \end{cases}$

► **Initialisation**

D'après l'énoncé, le réel u_0 est bien défini et : $u_0 = 1 \geq 0$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $\begin{cases} u_{n+1} \text{ bien défini} \\ u_{n+1} \geq 0 \end{cases}$

× Tout d'abord, par hypothèse de récurrence, le réel u_n est bien défini et : $u_n \geq 0$.

Ainsi : $1 + u_n \geq 0$. On en déduit que $\sqrt{1 + u_n} - 1$ est bien défini, et donc u_{n+1} est bien défini.

× Ensuite :

$$\begin{aligned} u_n &\geq 0 \\ \text{donc } 1 + u_n &\geq 1 \\ \text{d'où } \sqrt{1 + u_n} &\geq 1 \quad (\text{par croissance de } \sqrt{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}_+) \\ \text{ainsi } \sqrt{1 + u_n} - 1 &\geq 0 \\ \text{alors } u_{n+1} &\geq 0 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

□

3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Soit $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{K}^2$.

Supposons que la suite (u_n) converge vers ℓ_1 et que la suite (v_n) converge vers ℓ_2 .

Démontrer que la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

• Tout d'abord :

× comme la suite (u_n) converge vers ℓ_1 , alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_1, |u_n - \ell_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Autrement dit :

$$\forall n \geq n_1, \quad \ell_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq u_n \leq \ell_1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

× comme la suite (v_n) converge vers ℓ_2 , alors il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_2, |v_n - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Autrement dit :

$$\forall n \geq n_2, \quad \ell_2 - \frac{\varepsilon}{2} \leq v_n \leq \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2} \quad (**)$$

• On note alors : $n_0 = \max(n_1, n_2)$.

Soit $n \geq n_0$.

× D'une part : $n \geq n_0 \geq n_1$. Ainsi : $(*)$.

× D'autre part : $n \geq n_0 \geq n_2$. Ainsi : $(**)$.

En sommant $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$\ell_1 + \ell_2 - \varepsilon \leq u_n + v_n \leq \ell_1 + \ell_2 + \varepsilon$$

Autrement dit :

$$|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq \varepsilon$$

Finalement, la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$.

□

4. On note (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -3u_n + 2 \end{cases}$

Déterminer une forme explicite du terme général de la suite (u_n) .

Démonstration.

• Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x = -3x + 2 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

On note alors : $c = \frac{1}{2}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -3u_n + 2 \\ c &= -3c + 2 \end{cases}$$

En effectuant l'opération $L_1 - L_2$, on obtient :

$$u_{n+1} - c = -3(u_n - c)$$

On note alors : $v_n = u_n - c$.

La suite (v_n) est géométrique de raison (-3) . Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = (-3)^n v_0 = (-3)^n (u_0 - c) = \frac{1}{2} (-3)^n$$

• On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = v_n + c = \frac{1}{2} (-3)^n + \frac{1}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2} ((-3)^n + 1)$$

□