

Interrogation 11

1. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Donner la définition quantifiée de « la suite (u_n) est bornée ».

Démonstration.

La définition de « la suite (u_n) est bornée » est : $\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq K$.

□

2. Déterminer, si elle existe, la borne supérieure de la suite $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Démonstration.

Démontrons : $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$.

Autrement dit, démontrons que 1 est le plus petit des majorants de l'ensemble $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

- Démontrons que 1 est un majorant de A .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque : $-\frac{1}{n} \leq 0$. Donc :

$$1 - \frac{1}{n} \leq 1$$

Ainsi, 1 est un majorant de A .

- Démontrons qu'il n'y a pas de plus petit majorant de A que 1.

Soit $\varepsilon > 0$.

On remarque : $1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left| \left(1 - \frac{1}{n_0}\right) - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc :

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leq \left(1 - \frac{1}{n_0}\right) - 1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où :

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq 1 - \frac{1}{n_0} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

En particulier :

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq 1 - \frac{1}{n_0}$$

Autrement dit, $1 - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A .

Comme ceci est valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit qu'il n'y a pas de majorant de A plus petit que 1.

Finalement : $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$.

□

3. On note (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Déterminer une forme explicite du terme général de la suite (u_n) .

Démonstration.

- L'équation caractéristique associée à cette suite est : $x^2 = -x - 1$.
On note alors : $P(X) = X^2 + X + 1$. Et on note Δ le discriminant de P .

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$$

Le polynôme P admet donc deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{et} \quad r_2 = \overline{r_1}$$

- On en déduit qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \times 1^n \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right) + \mu \times 1^n \sin\left(\frac{2\pi}{3} n\right) = \lambda \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right) + \mu \sin\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$$

- On remarque de plus :

$$(S) \quad \begin{cases} \lambda = u_0 = 1 \\ -\frac{1}{2}\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu = u_1 = 1 \end{cases}$$

Or :

$$(S) \quad \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1} \begin{cases} \lambda = 1 \\ \sqrt{3}\mu = 3 \end{cases}$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$.

□