

Interrogation 10

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$: $y' - 5y = 3$ (E_1).

Démonstration.

- Tout d'abord :

- × l'équation homogène (H_1) associée à (E_1) est linéaire homogène d'ordre 1,
- × une primitive de la fonction $t \mapsto -5$ est $t \mapsto -5t$.

L'ensemble des solutions de l'équation (H_1) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda e^{5t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On note :

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

La fonction h est une solution particulière de (E_1). En effet :

- × la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$,
- × pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$h'(t) - 5h(t) = 0 - 5 \times \left(-\frac{3}{5}\right) = 3$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est donc : $\{t \mapsto -\frac{3}{5} + \lambda e^{5t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

□

2. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$: $2y'' + y' + 3y = t^2$ (E_2).

Démonstration.

- Tout d'abord :

- × l'équation homogène (H_2) associée à (E_2) est linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants,
- × son équation caractéristique est :

$$2r^2 + r + 3 = 0$$

On note P le polynôme associé à cette équation et Δ son discriminant.

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 3 = -23 < 0$$

Les racines de P sont donc :

$$r_1 = \frac{-1 - i\sqrt{23}}{4} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1 + i\sqrt{23}}{4}$$

L'ensemble des solutions de (H_2) est donc :

$$\left\{ t \mapsto \lambda_1 e^{-\frac{1}{4}t} \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right) + \lambda_2 e^{-\frac{1}{4}t} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- On note :

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{3} t^2 - \frac{2}{9} t - \frac{10}{27} \end{aligned}$$

La fonction h est solution de (E_2) . En effet :

- × la fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$,
- × pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & 2h''(t) + h'(t) + 3h(t) \\ &= 2 \times \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} t - \frac{2}{9} \right) + 3 \left(\frac{1}{3} t^2 - \frac{2}{9} t - \frac{10}{27} \right) \\ &= t^2 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est donc :

$$\left\{ t \mapsto \frac{1}{3} t^2 - \frac{2}{9} t - \frac{10}{27} + \lambda_1 e^{-\frac{1}{4}t} \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4} t\right) + \lambda_2 e^{-\frac{1}{4}t} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{4} t\right) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Commentaire

Détaillons l'obtention de la fonction h .

Comme le second membre de (E_2) est $t \mapsto t^2$, on cherche une solution de (E_2) sous la forme $t \mapsto at^2 + bt + c$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On note alors $h : t \mapsto at^2 + bt + c$. La fonction h est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2at + b \\ h''(t) &= 2a \end{aligned}$$

On obtient :

h solution de (E_2)

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, 2h''(t) + h'(t) + 3h(t) = t^2$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, 4a + (2at + b) + (3at^2 + 3bt + 3c) = t^2$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, (3a - 1)t^2 + (2a + 3b)t + (4a + b + 3c) = 0$$

$$\iff (3a - 1)X^2 + (2a + 3b)X + (4a + b + 3c) = 0$$

(le polynôme $(3a - 1)X^2 + (2a + 3b)X + (4a + b + 3c)$ admet une infinité de racines)

$$\iff \begin{cases} 3a &= 1 \\ 2a + 3b &= 0 \\ 4a + b + 3c &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_1 \\ \iff \end{array} \begin{cases} 3a &= 1 \\ 9b &= -2 \\ 3b + 9c &= -4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2 \\ \iff \end{array} \begin{cases} 3a &= 1 \\ 9b &= -2 \\ 27c &= -10 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } h : t \mapsto \frac{1}{3} t^2 - \frac{2}{9} t - \frac{10}{27}$$

□