CH III : Généralités sur les fonctions - Étude de fonctions

I. Étude graphique de fonctions

La méthodologie d'étude d'une fonction f (dérivable) est la suivante.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction (si celui-ci n'est pas donné).

2) Recherche de l'intervalle d'étude $\mathscr{E}_f$ par réduction (parité, périodicité).

3) Démonstration de la dérivabilité de f sur $\mathscr{E}_f$.

4) Calcul de f' (là où f est dérivable).

5) Construction du tableau de variations de f (étude du signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathscr{E}_f$).

6) Étude des limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude. et recherche d'asymptotes.

7) Calcul des tangentes de f en certains points (généralement l'énoncé précise ces points).
(on y reviendra dans un chapitre ultérieur ...)

8) Étude graphique : dans un repère, on place :
   - × les points particuliers (ceux dont l'abscisse x vérifie $f'(x) = 0$),
   - × les droites particulières (tangentes) de la courbe.
   - × on peut éventuellement placer des points supplémentaires.

   On trace alors $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f sur $\mathscr{E}_f$ puis sur $\mathscr{D}_f$.

II. Généralités sur les fonctions

II.1. Fonctions $D \to \mathbb{R}$

Notation
Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.
L'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}$ est notée $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^D$.

Proposition 1.

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ non vide (en pratique, D sera souvent un intervalle ou une réunion d'intervalles).

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ des applications

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $f + g$, $f \times g$ et $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ sont également des applications de D dans $\mathbb{R}$.

Remarque
On verra dans un chapitre ultérieur que cela signifie en particulier que $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (c'est en fait même une $\mathbb{R}$-algèbre mais cela sort du cadre de notre programme).

Les fonctions f et g doivent être définies sur le même ensemble D. On ne peut, par exemple, sommer les fonctions $f : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc}]2, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \ln(x-2) \end{array}$

II.2. Monotonie

Définition

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

On dit que :

a) la fonction f est **croissante** sur D si et seulement si :

$$\boxed{\forall (x, y) \in D^2, \quad (x \leqslant y) \ \Rightarrow \ \big(f(x) \leqslant f(y)\big)}$$

b) la fonction f est **strictement croissante** sur D si et seulement si :

$$\boxed{\forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y) \ \Rightarrow \ \big(f(x) < f(y)\big)}$$

c) la fonction f est **décroissante** sur D si et seulement si :

$$\boxed{\forall (x, y) \in D^2, \quad (x \leqslant y) \ \Rightarrow \ \big(f(x) \geqslant f(y)\big)}$$

d) la fonction f est **strictement décroissante** sur D si et seulement si :

$$\boxed{\forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y) \ \Rightarrow \ \big(f(x) > f(y)\big)}$$

e) la fonction f est **monotone** si et seulement si :

$$\boxed{f \text{ croissante sur } D \ \ \texttt{OU} \ \ f \text{ décroissante sur } D}$$

On obtient de même la définition de **stricte monotonie** sur D.

Remarque

- On pourrait également donner la définition suivante de la stricte croissance de f sur D :

$$\forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y) \ \Leftrightarrow \ \big(f(x) < f(y)\big)$$

Démonstration.

Pour démontrer cette équivalence des définitions, notons :

(1) $\forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y) \ \Rightarrow \ \big(f(x) < f(y)\big)$

(2) $\forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y) \ \Leftrightarrow \ \big(f(x) < f(y)\big)$

On procède par double implication.

($\Leftarrow$) On a bien sûr : *(2)* $\Rightarrow$ *(1)*.

($\Rightarrow$) Supposons *(1)* et démontrons *(2)*.
Soit $(x, y) \in D^2$. On procède de nouveau par double implication.

- ($\Rightarrow$) Vraie d'après *(1)*.
- ($\Leftarrow$) On procède par contraposée.
  Supposons : $x \geqslant y$. Deux cas se présentent alors :
  - $\times$ si $x = y$, alors on a toujours : $f(x) = f(y)$ par définition d'une fonction.
  - $\times$ si $x > y$, alors d'après *(1)* : $f(x) > f(y)$.

  Finalement : $f(x) \geqslant f(y)$.
  On a bien démontrer : $\texttt{NON}(x < y) \;\Rightarrow\; \texttt{NON}(f(x) < f(y))$. □

- Bien sûr, on peut de même donner une définition équivalente de la stricte décroissance de f sur D :

$$\forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y) \;\Leftrightarrow\; \big(f(x) > f(y)\big)$$

Dire qu'une fonction f est croissante (resp. décroissante, resp. monotone) n'a aucun sens.

Une fonction est toujours croissante (resp. décroissante, resp. monotone) SUR UN INTERVALLE.

Par exemple :

$\times$ la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

$\times$ la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Cependant, elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$. En effet :

$$-2 \leqslant 1 \;\; \texttt{ET} \;\; \frac{1}{-2} < \frac{1}{1}$$

Il est donc crucial de préciser **l'intervalle** de monotonie.

Exemples

- Les fonctions $x \mapsto x^3$, $x \mapsto e^x$ sont (strictement) croissantes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$ mais pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet :

$$1 < \frac{3}{2} \;\; \texttt{ET} \;\; \lfloor 1 \rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor$$

- Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto |x|$ sont (strictement) décroissantes sur $\mathbb{R}_-$ et (strictement) croissantes sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction sin est (strictement) croissante sur chaque intervalle $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ et (strictement) décroissante sur chaque intervalle $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 2.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soient f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

Alors :

a) *si f et g sont croissantes (resp. strictement croissantes) sur D, alors $f+g$ est croissante (resp. strictement croissante) sur D.*

b) *si f et g sont décroissantes (resp. strictement décroissantes) sur D, alors $f + g$ est décroissante (resp. strictement décroissante) sur D.*

Démonstration.
À faire. □

Proposition 3.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soient f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

Supposons que les fonctions f et g sont :

$\times$ *croissantes (resp. strictement croissantes) sur D,*

$\times$ *positives sur D.*

Alors la fonction $f \times g$ est croissante (resp. strictement croissante) sur D.

Démonstration.
À faire. □

Proposition 4.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

Soit g une fonction de $f(D)$ dans $\mathbb{R}$.

Alors :

a) $\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ croissante sur } D \\ g \text{ croissante sur } f(D) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \text{ croissante sur } D}$

b) $\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ croissante sur } D \\ g \text{ décroissante sur } f(D) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \text{ décroissante sur } D}$

c) $\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ décroissante sur } D \\ g \text{ croissante sur } f(D) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \text{ décroissante sur } D}$

d) $\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ décroissante sur } D \\ g \text{ décroissante sur } f(D) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \text{ croissante sur } D}$

Remarque
Ces quatre propriétés sont encore valides en remplaçant tous les « croissante » par « strictement croissante », et tous les « décroissante » par « strictement décroissante ».

Démonstration.
À faire. □

Exercice 1
Déterminer la monotonie des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition sans effectuer de calculs de dérivées.

1. $f : x \mapsto x^2 + \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. $u : x \mapsto x^2 + \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}_-$.

3. $g : x \mapsto \ln(2x+3)$ sur $]-\frac{3}{2}, +\infty[$.

4. $h : x \mapsto x \sin(x) + |x|$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5. $v : x \mapsto |x| - \cos(x^3)$ sur $[-\pi, 0]$.

II.3. Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

On dit que :

a) la fonction f est **minorée** sur D si et seulement si :

$$\boxed{\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D, \quad m \leqslant f(x)}$$

b) la fonction f est **majorée** sur D si et seulement si :

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D, \quad f(x) \leqslant M}$$

c) la fonction f est **bornée** sur D si et seulement si :

$$\boxed{\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in D, \quad m \leqslant f(x) \leqslant M}$$

ou encore, si et seulement si :

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in D, \quad \big|f(x)\big| \leqslant K}$$

Remarque
Si une fonction f admet un majorant M (resp. un minorant m) alors elle en admet une infinité. En effet, tout élément plus grand que M (resp. plus petit que m) est un majorant (resp. minorant) de f.

> Les bornes m et M évoquées dans ces définitions ne sont pas forcément des valeurs prises par f.

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ est majorée par 1 (donc par 1.1, 1.5, e, 37, 10^{18} ...) mais 1 n'est pas atteint par f.

Exemples

- La fonction $x \mapsto x^2$ est minorée par 0 sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$. En effet : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.
- La fonction cos est bornée sur $\mathbb{R}$. En effet : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
- La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est minorée par 0 sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$. En effet : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
- Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x^3$ ne sont ni minorée ni majorée sur $\mathbb{R}$. En effet : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$. De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.
- La fonction $x \mapsto -x^2 + 2$ est majorée par 2 sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas minorée sur $\mathbb{R}$. En effet : $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 + 2 = -\infty$.

Proposition 5.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soient f et g deux fonction de D dans $\mathbb{R}$.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

a) *Si f et g sont minorées sur D, alors $f+g$, $f \times g$ et $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ sont minorées sur D.*

b) *Si f et g sont majorées sur D, alors $f+g$, $f \times g$ et $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ sont majorées sur D.*

c) *Si f et g sont bornées sur D, alors $f+g$, $f \times g$ et $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ sont bornées sur D.*

Démonstration.
À faire. □

Remarque
Notons que l'ensemble des fonctions bornées de D dans $\mathbb{R}$ est encore un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (et même encore une $\mathbb{R}$-algèbre).

II.4. Extrema locaux, extrema globaux

II.4.a) Notion de minimum / maximum global

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1) f admet un **minimum** sur l'intervalle I si :

$$\boxed{\exists x_0 \in I, \forall x \in I,\ f(x) \geqslant f(x_0)}$$

Si tel élément existe, on dit que f atteint son **minimum** au point x_0.

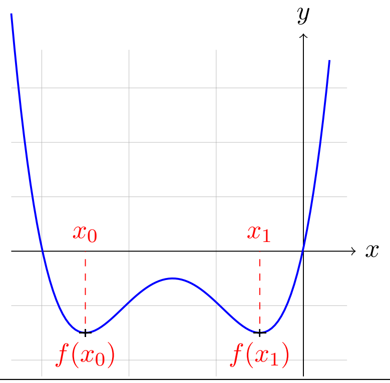
2) f admet un **maximum** sur l'intervalle I si :

$$\boxed{\exists x_0 \in I, \forall x \in I,\ f(x) \leqslant f(x_0)}$$

Si tel élément existe, on dit que f atteint son **maximum** au point x_0.

Remarque

- S'il existe, le maximum (resp. minimum) d'une fonction sur I est unique. Cependant, ce maximum peut être atteint en plusieurs points de I.
- Le maximum (resp. minimum) de f sur I, s'il existe, est un majorant (resp. minorant) de f qui est atteint par f.



La fonction f admet le minimum $-\frac{3}{2}$. Ce minimum est atteint en les deux points x_0 et x_1 :

- $f(x_0) = -\frac{3}{2}$.
- $f(x_1) = -\frac{3}{2}$.

II.4.b) Notion de minimum / maximum local

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

1) On dit que f admet un **maximum local** en x_0 si :

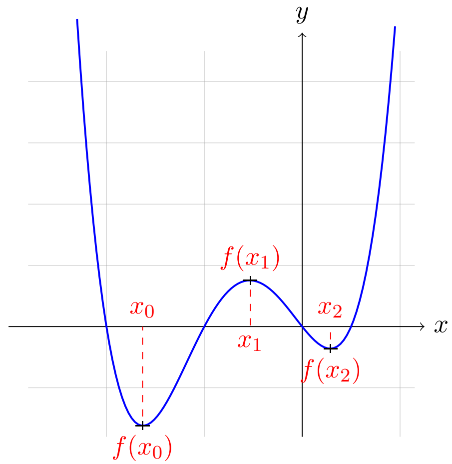
$$\boxed{\exists \alpha > 0, \forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(x_0)}$$

2) On dit que f admet un **minimum local** en x_0 si :

$$\boxed{\exists \alpha > 0, \forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x_0) \leqslant f(x)}$$

Remarque

- Une fonction f peut admettre plusieurs maxima (resp. minima) locaux.
- Un maximum (resp. minimum) local d'une fonction f est un majorant (resp. minorant) local de f.



La fonction f admet :

- un minimum local en x_0.
- un maximum local en x_1.
- un minimum local en x_2.

La fonction f :

- n'admet pas de maximum.
- admet un minimum (global) au point x_0.

La fonction f n'admet pas de majorant. Elle admet une infinité de minorants : tout réel $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leqslant f(x_0)$ est un minorant de f. Parmi ses minorants, on peut distinguer celui qui a le plus d'intérêt.

II.4.c) Notion de borne supérieure / inférieure

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1) Si f est minorée sur I, on appelle **borne inférieure de** f sur I le plus grand des minorants de f sur I. Cet élément est noté $\inf\limits_I f$ ou $\inf\limits_{x \in I} f(x)$.

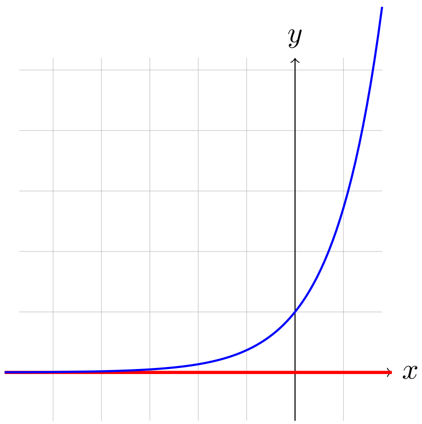
2) Si f est majorée sur I, on appelle **borne supérieure de** f sur I, le plus petit des majorants de f sur I. Cet élément est noté $\sup\limits_I f$ ou $\sup\limits_{x \in I} f(x)$.

3) Si f est bornée sur I, on peut donc définir $\sup\limits_I |f|$.

La borne supérieure (resp. inférieure) de f n'est pas forcément une valeur atteinte par f. Si c'est le cas il s'agit du minimum (resp. maximum) de la fonction.

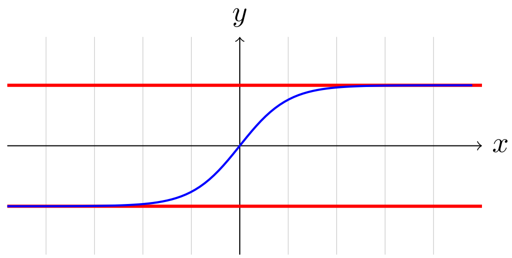
- si $\inf\limits_I f \in f(I)$, alors $\inf\limits_{x \in I} f(x) = \min\limits_{x \in I} f(x)$
- si $\sup\limits_I f \in f(I)$, alors $\sup\limits_{x \in I} f(x) = \max\limits_{x \in I} f(x)$

- Considérons la fonction $f : x \mapsto e^x$.



- La fonction f n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}$.
- Elle est minorée par tout réel $m \leqslant 0$.
- Sa borne inférieure est : $\inf\limits_{\mathbb{R}} f = 0$.

- La fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ n'admet pas de minimum / maximum.



- La fonction g n'admet pas de minimum / maximum.
- Elle est minorée par tout réel $m \leqslant -1$.
- Elle est majorée par tout réel $M \geqslant 1$.
- $\inf\limits_{\mathbb{R}} g = -1$ et $\sup\limits_{\mathbb{R}} g = 1$.

III. Réduction de l'ensemble de définition

III.1. Parité, imparité

Définition

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **paire** si : $\boxed{\forall x \in I, \quad f(-x) = f(x)}$

Pour que cette définition soit valide, il faut supposer que les quantités $f(x)$ et $f(-x)$ sont bien définies. Il faut donc que la fonction f soit définie sur un intervalle I symétrique :

$$x \in I \Rightarrow -x \in I$$

Remarque

- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Ainsi, si f paire, alors f n'est pas injective (sauf si $I = \{0\}$).
- On peut écrire une version « sans les x » de cette définition.
  Soit I un intervalle symétrique. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est paire si :

$$\boxed{f \circ (-\mathrm{id}) = f}$$

Étude d'une fonction paire

Soit f une fonction définie sur I.

Supposons que f est paire. Alors l'étude de f s'effectue de la façon suivante :

1) On restreint l'ensemble d'étude de f à $I \cap \mathbb{R}_+$.

2) On étudie f normalement sur $I \cap \mathbb{R}_+$: dérivabilité, dérivation, variations, limites.

3) On conclut quant au tableau de variations complet par parité de f.

4) Pour le tracé de la courbe représentative de f, on l'effectue d'abord sur $I \cap \mathbb{R}_+$, puis on complète la partie $I \cap \mathbb{R}_-$ en effectuant le symétrique de la courbe déjà tracée par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple

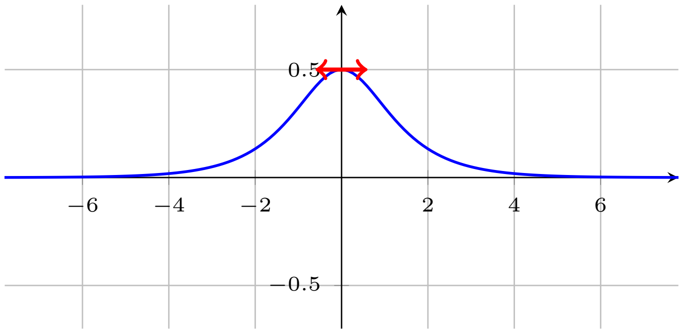
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

Donner son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ et démontrer que f est paire.

- La quantité $f(x)$ est définie pour tout x tel que : $e^{2x}+1 \neq 0$. Or $e^{2x}+1 > 0$. On en déduit que $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}+1} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^{2x}}+1} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}}} = \frac{1}{e^x}\,\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{e^x}{e^{2x}+1} = f(x)$$

On en déduit que f est paire. Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Définition

Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **impaire** si : $\boxed{\forall x \in I, \quad f(-x) = -f(x)}$

Remarque

- $\boxed{\text{La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.}}$
- Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est impaire si :

$$\boxed{f \circ (-\mathrm{id}) = (-\mathrm{id}) \circ f}$$

Étude d'une fonction impaire

Soit f une fonction définie sur I.

Supposons que f est impaire. Alors l'étude de f s'effectue de la façon suivante :

1) On restreint l'ensemble d'étude de f à $I \cap \mathbb{R}_+$.

2) On étudie f normalement sur $I \cap \mathbb{R}_+$: dérivabilité, dérivation, variations, limites.

3) On conclut quant au tableau de variations complet par imparité de f.

4) Pour le tracé de la courbe représentative de f, on l'effectue d'abord sur $I \cap \mathbb{R}_+$, puis on complète la partie $I \cap \mathbb{R}_-$ en effectuant le symétrique de la courbe déjà tracée par rapport à l'origine du repère.

Propriété *(jouons avec la définition ...)*

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1) $\boxed{f \text{ paire } \Rightarrow g \circ f \text{ paire}}$

2) $\boxed{f \text{ et } g \text{ impaires } \Rightarrow g \circ f \text{ impaire}}$

3) $\boxed{f \text{ impaire et } g \text{ paire } \Rightarrow g \circ f \text{ paire}}$

Démonstration.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

Ce qui démontre que $g \circ f$ est paire.
On aurait pu faire une démonstration « sans les x » :

$$(f \circ g) \circ (-\mathrm{id}) = f \circ (g \circ (-\mathrm{id})) = f \circ g$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(-(f(x))) = -g(f(x)) = -g \circ f(x)$$

Ce qui démontre que $g \circ f$ est impaire.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$g \circ f \circ (-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

Ce qui démontre que $g \circ f$ est paire.

□

Exercice 2
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Démontrer que toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

III.2. Périodicité

Définition

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est **T-périodique** (ou périodique de période T) sur D si :

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{1)}\ \forall x \in D,\ x + T \in D, \\ \textit{2)}\ \forall x \in D,\ f(x+T) = f(x) \end{array}}$$

Remarque

- Remarquons que le point ***1)*** est nécessaire pour la bonne définition du point ***2)***.
- On dit que f est périodique sur D si :

$$\exists T \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{1)}\ \forall x \in D,\ x + T \in D, \\ \textit{2)}\ \forall x \in D,\ f(x+T) = f(x) \end{array} \right.$$

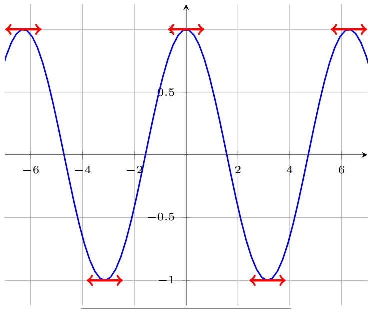
- En particulier l'ensemble D doit être stable par la translation $x \mapsto x + T$.
- Notons que si f est T-périodique sur D, alors, pour tout $x \in D$:

$$\begin{array}{ccccc} & f(x-T) & = f(x) = & f(x+T) & \\ & \shortparallel & & \shortparallel & \\ \cdots = f(x-3T) = & f(x-2T) & & f(x+2T) & = f(x+3T) = \cdots \end{array}$$

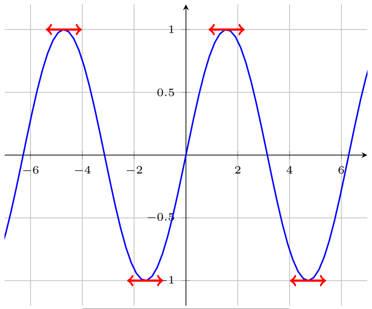
Finalement : $\forall k \in \mathbb{Z},\ f(x+kT) = f(x)$

Exemples

- Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.

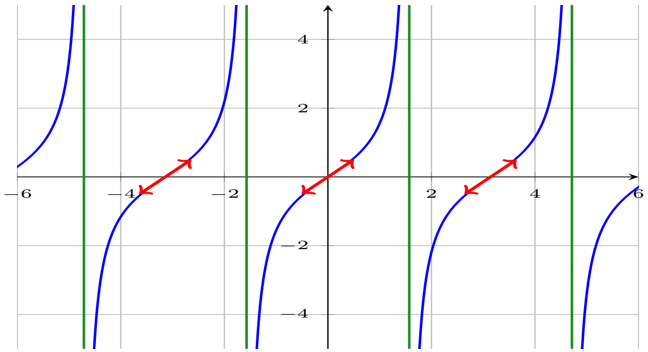


Fonction cos



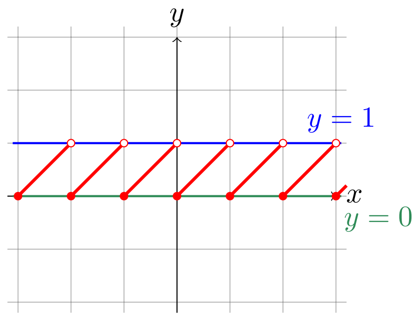
Fonction sin

- La fonction tan est π-périodique sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.



Fonction tan

- La fonction partie fractionnaire $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique sur $\mathbb{R}$.



Fonction $x \mapsto x - [x]$

Proposition 6.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

f est T-périodique sur D	$\Rightarrow$	*pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est nT-périodique sur D*

Démonstration.
À faire. $\square$

Remarque

Tout réel non nul ω tel que :

× $\forall x \in D,\ x+\omega \in D$,

× $\forall x \in D,\ f(x+\omega) = f(x)$.

s'appelle une **période** de f.

Étude d'une fonction T-périodique

Soit f une fonction définie sur I.

Supposons que f est T-périodique. Alors l'étude de f s'effectue de la façon suivante :

1) On restreint l'ensemble d'étude de f à $I \cap [0, T]$ (ou $I \cap J_T$ où J_T est un intervalle de longueur T).

2) On étudie f normalement sur $I \cap [0, T]$: dérivabilité, dérivation, variations, limites.

3) On conclut quant au tableau de variations complet par T-périodicité de f.

4) Pour le tracé de la courbe représentative de f, on l'effectue d'abord sur $I \cap [0, T]$, puis on complète sur tout I en effectuant des translations de vecteur $(T, 0)$.

III.3. Translation et homothétie

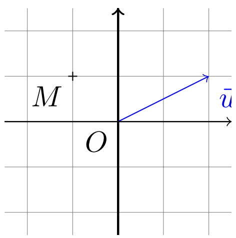
Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

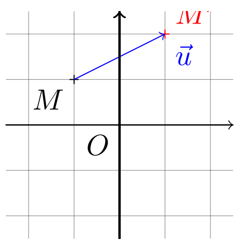
On appelle **translation** de vecteur $\vec{u}$, l'application qui à un point $M \in \mathbb{R}^n$ associe le point $M' \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{MM'} = \vec{u}$.

Illustration



Avant translation de vecteur $\vec{u}$

$-- \longrightarrow$



Après translation de vecteur $\vec{u}$

Proposition 7.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

L'application $x \mapsto x + a$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la translation de vecteur a.

Proposition 8.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie sur D, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe de représentative.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Alors, la fonction $g_a : x \mapsto f(x + a)$:

- × *est définie sur $\{x - a \mid x \in D\}$,*
- × *admet pour courbe représentative la translation de $\mathcal{C}_f$ par le vecteur $(0, -a)$.*

Exercice 3

1. Tracer la courbe représentative de la fonction ln.

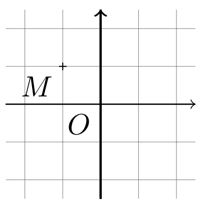
2. En déduire le tracé de la courbe représentative de $f : x \mapsto \ln(x + 1)$.

Définition

Soit $k \in \mathbb{R}^*$.

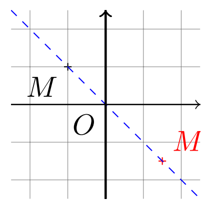
On appelle **homothétie** de centre O et de rapport k, l'application qui à un point $M \in \mathbb{R}^n$ associe le point $M' \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{OM'} = k \cdot \vec{OM}$.

Illustration



Avant homothétie de centre O de rapport $-\dfrac{3}{2}$

$-- \longrightarrow$



Après homothétie de centre O de rapport $-\dfrac{3}{2}$

Proposition 9.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

L'application $x \mapsto a\,x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'homothétie de centre 0 et de rapport a.

Proposition 10.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie sur D, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe de représentative.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

Alors, la fonction $g_a : x \mapsto f(a\,x)$:

× *est définie sur $\{\frac{x}{a} \mid x \in D\}$,*

× *admet pour courbe représentative $\mathcal{C}_f$ munie du changement d'échelle d'abscisse $x \mapsto \dfrac{x}{a}$.*

Exercice 4

1. Tracer la courbe représentative de la fonction cos.

2. En déduire le tracé de la courbe représentative de $f : x \mapsto \cos(2\pi x)$.

IV. Dérivabilité et dérivation

IV.1. Règles de dérivation

IV.1.a) Somme, produit, quotient

Soient f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Les égalités suivantes sont vérifiées sur tout ensemble E où les fonctions f et g sont dérivables.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (\lambda\, f)' & = & \lambda\, f' \\ (f+g)' & = & f'+g' \\ (f \times g)' & = & f'\,g + f\,g' \\ (f^n)' & = & n\,f'\,f^{n-1} \\ \left(\dfrac{1}{g}\right)' & = & \dfrac{-g'}{g^2} \\ \left(\dfrac{f}{g}\right)' & = & \dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2} \end{array}}$$

⚠ Pour les règles de dérivation de l'inverse et du quotient, il faut ici veiller à se placer sur un ensemble E sur lequel g ne s'annule pas.

IV.1.b) Composition

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Supposons que :

- la fonction u :
  × est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,
  × telle que : $f(I) \subset J$,
- la fonction g est dérivable sur J.

Alors l'égalité suivante est vérifiée sur l'intervalle I : $\boxed{(g \circ f)' \;=\; f' \times (g' \circ f)}$

En particulier, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour toute fonction f :

× dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,

× à valeurs strictement positives.

Alors l'égalité suivante est vérifiée sur l'intervalle I : $\boxed{(f^\alpha)' = \alpha\, f'\, f^{\alpha-1}}$

IV.1.c) Réciproque

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supposons que la fonction f est :

× bijective d'un intervalle I dans un intervalle J,

× dérivable sur I,

× telle que : $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$.

Alors f^{-1} est dérivable sur J et l'égalité suivante est vérifiée sur l'intervalle J : $\boxed{(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}}$

IV.2. Théorème de la bijection

IV.2.a) Un premier théorème

Théorème 1.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction :

× *continue sur $[a, b]$.*

× *strictement croissante sur $[a, b]$.*

On a alors :

$$\boxed{\forall y \in [f(a), f(b)], \exists! c \in [a, b],\ y = f(c)}$$

Autrement dit :

- Pour y fixé dans $[f(a), f(b)]$ l'équation en x : $y = f(x)$ a une unique solution dans l'intervalle $[a, b]$.
- Ou encore, tout élément y dans $[f(a), f(b)]$ possède un unique antécédent par f dans $[a, b]$.

Remarque
Ce théorème est aussi connu sous le nom de **T**héorème des **V**aleurs **I**ntermédiaires (cas de la stricte monotonie). Des énoncés similaires existent :

× pour tout type d'intervalle ($[a, b[$, $]a, b[$, $]a, b]$).

× lorsque f strictement décroissante. Dans ce cas, la conclusion est :

$$\boxed{\forall y \in [f(b), f(a)], \exists! c \in [a, b],\ y = f(c)}$$

(et on peut encore prendre tout type d'intervalle ...)

IV.2.b) Les fonctions bijectives

Définition *Fonction bijective*

Soient E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

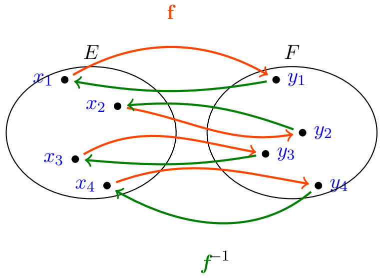
Soit $f : E \to F$ une fonction.

- On dit que f est une bijection de E sur F si :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists! x \in E,\ y = f(x)}$$

- Si $f : E \to F$ définit une bijection de E sur F, alors elle permet de définir la fonction qui à tout réel $y \in F$ associe l'unique antécédent de y par f dans l'ensemble E. Cette fonction est notée $f^{-1} : F \to E$ et est appelée **fonction réciproque** de f.
  (faire un dessin !)

Représentation graphique.
Soit $f : E \to F$ une application bijective de E sur F.



- Par définition de la bijectivité, tout élément y_i de F possède un unique antécédent x_j dans E par f.
- Par définition de fonction, tout élément x_j de E ne possède qu'une image y_i dans F.

De manière non formelle, si $f : E \to F$ est une bijection de E sur F, alors il y a « exactement autant » d'éléments dans E et dans F.
Graphiquement, cela se traduit par le fait que l'on peut relier les x_j au y_i :

× par les flèches rouges. C'est la fonction $f : E \to F$.

× par les flèches vertes, obtenues en orientant dans l'autre sens les flèches rouges. C'est la fonction $f^{-1} : F \to E$.

Propriété

Soit $f : E \to F$ une bijection de E sur F.
Et $f^{-1} : F \to E$ sa réciproque.

On a alors :

1) $\boxed{\forall x \in E, \forall y \in F,\ (y = f(x) \ \Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y))}$

2) $\boxed{\forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y}$

3) $\boxed{\forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = x}$

4) $f^{-1} : F \to E$ est une bijection de F sur E.

Démonstration.

1) Soient $x \in E$ et $y \in F$.
($\Rightarrow$) Supposons $y = f(x)$. Autrement dit, x est un antécédent (il est unique puisque f est bijective) de y par f. Or, par définition, f^{-1} associe à chaque élément $y \in F$ son unique antécédent dans E par f : c'est précisément x. Cela démontre que $f^{-1}(y) = x$.

($\Leftarrow$) Supposons $x = f^{-1}(y)$. Par définition, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent dans l'ensemble E de l'élément y par la fonction f. On a donc $y = f(x)$.

2) Soit $y \in F$. Par définition, $f^{-1}(y)$ est l'unique x dans E tel que $y = f(x)$. Ainsi, $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.

3) Soit $x \in E$. Notons $y = f(x)$. On a donc $x = f^{-1}(y)$ (d'après la propriété ***1)***). Ainsi, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$.

4) On doit démontrer que : $\forall v \in E, \exists! u \in F,\ v = f^{-1}(u)$.
Soit $v \in E$. D'après la propriété ***3)***, $f^{-1}(f(v)) = v$. Ainsi, en notant $u = f(v)$, on a bien trouvé un élément $u \in F$ tel que $f^{-1}(u) = v$. Il reste à démontrer l'unicité. S'il existe $t \in F$ tel que $f^{-1}(t) = v$, alors par la propriété ***1)***, on a $t = f(v)$. Ainsi, $t = f(v) = u$.

□

Remarque
Soit $f : E \to F$ une fonction bijective de E dans F et $x \in E$, $y \in F$ deux éléments tels que $y = f(x)$. D'après la propriété ***1)***, on a alors aussi $x = f^{-1}(y)$. On a donc :

× x est l'antécédent de y par f.

× y est l'image de x par f.

× x l'image de y par f^{-1}.

× y est l'antécédent de x par f^{-1}.

IV.2.c) Le théorème de la bijection

Théorème 2. *Théorème de la bijection*

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction :

- $\times$ *continue sur $[a, b]$.*
- $\times$ *strictement croissante sur $[a, b]$.*

On a alors :

1) *f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.*

2) *De plus, sa bijection réciproque $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ est :*

- $\times$ *continue sur $[f(a), f(b)]$.*
- $\times$ *strictement croissante sur $[f(a), f(b)]$.*

Démonstration.

1) C'est l'énoncé du TVI traduit avec le vocabulaire des fonctions bijectives.

2) On en reparlera ... □

Remarque

Les extensions précédentes peuvent aussi être appliquées à ce théorème : on peut l'écrire avec des intervalles du type $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$; si la fonction f initiale est strictement décroissante, la conclusion sera alors la stricte décroissance de f^{-1}.

Par exemple :

Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction : $\times$ continue sur $]a, b]$ $\times$ strictement décroissante sur $]a, b]$	$\Rightarrow$	• f est une bijection de $]a, b]$ sur $[f(b), f(a)[$ • $f^{-1} : [f(b), f(a)[\to]a, b]$ est : $\times$ continue sur $[f(b), f(a)[$ $\times$ strictement croissante sur $[f(b), f(a)[$