Fiche Méthodes : Calculs d'intégrales d'une fonction continue sur un segment

I. Calcul de primitives « à vue »

On se réfèrera à la Fiche Primitives.

II. Intégration par parties d'une intégrale d'une fonction continue sur un segment

Théorème 1.

Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I.
Soit $(a,b) \in I^2$.

$$\boxed{\int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt = \left[\ u(t)\ v(t)\ \right]_a^b - \int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt}$$

Ce qu'on peut lire :

$$\boxed{\int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt = \left[\ u(t)\ v(t)\ \right]_a^b - \int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt}$$

Remarque
Effectuer une IPP consiste donc à écrire la fonction dont on doit calculer l'intégrale comme un produit de deux fonctions $(u \times v')$:

- × dont l'une sera dérivée $(u \rightsquigarrow u')$,
- × et l'autre sera intégrée $(v' \rightsquigarrow v)$.

Exemple

- $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\ dt = \left[\ t\ln(t)\ \right]_1^2 - \int_1^2 1\ dt = 2\ln(2) - 1$
- $\displaystyle\int_1^2 t^2\ln(t)\ dt = \frac{1}{3}\left[\ t^3\ln(t)\ \right]_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 t^2\ dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 t^k\ln(t)\ dt = \frac{1}{k+1}\left[\ t^{k+1}\ln(t)\ \right]_1^2 - \frac{1}{k+1}\int_1^2 t^k\ dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 (\ln(t))^2\ dt = \left[\ (\ln(t))^2\ \right]_1^2 - 2\int_1^2 \ln(t)\ dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}\ dt = -\frac{1}{2}\left[\ (t^2+1)^{-1}\ln(t)\ \right]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t(1+t^2)}\ dt$
  Or $\displaystyle\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$ donc ...

`À RETENIR`

Il faut s'empresser de dériver la fonction ln : en la dérivant, on tombe sur le calcul de la primitive d'une fonction rationnelle.

Application : calcul d'une primitive de $\ln$
Soit $x > 0$.
Le calcul précédent fournit la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1.

$$\int_1^x \ln(t)\ dt = \left[\ t\ln(t)\ \right]_1^x - \int_1^x 1\ dt = x\ln(x) - (x-1)$$

Exercice 1
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'intégrations par parties.

1. $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\ dx$ *2.* $\displaystyle\int_0^1 t^2\,\mathrm{e}^t\ dt.$

III. Changement de variable pour une intégrale d'une fonction continue

Théorème 2.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J = [\alpha, \beta]$ tq $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq I$.

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ dt = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\ \varphi'(t)\ dt}$$

Aspect pratique

- En pratique, les changements de variable seront réalisés à l'aide de la méthode symbolique décrite ci-dessous.

  <u>MÉTHODO</u> : calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t + 1}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = e^t}$

  $u = e^t$ (donc $t = \ln(u)$)

  $\hookrightarrow du = e^t\ dt$ et $dt = \dfrac{1}{e^t}\,du = \dfrac{1}{u}\,du$

  - $t = 1 \ \Rightarrow\ u = e^1$
  - $t = 2 \ \Rightarrow\ u = e^2$

  (Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \ln(u)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[e, e^2]$.)

  En remplaçant dt par $\dfrac{1}{u}\,du$ et e^t par u, on obtient :

  $$\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_{e^1}^{e^2} \frac{1}{u+1}\,\frac{1}{u}\,du$$

  ce qui correspond au calcul précédent.

- L'idée du changement de variable est de faire disparaître une partie « gênante » de la quantité $f(t)$. Ainsi, on posera souvent le changement de variable : « $u =$ la racine présente dans l'intégrale ».

  <u>MÉTHODO</u> : calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t + 2\sqrt{t}}$ en posant $\boxed{u = \sqrt{t}}$

  $u = \sqrt{t}$ (donc $t = u^2$)

  $\hookrightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$ et $dt = 2\sqrt{t}\,du = 2\,u\,du$

  - $t = 1 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{1} = 1$
  - $t = 2 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{2}$

  (Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto u^2$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \sqrt{2}]$.)

  On obtient :

  $$\int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u^2+u}\,2u\ du = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\cancel{u}(u+1)}\,2\cancel{u}\ du$$

  $$= 2\,[\ \ln(|u+1|)\ ]_1^{\sqrt{2}} = 2\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$$

- On doit pouvoir repérer les changements de variable affines (ceux du type $\boxed{u = c\,t + d}$).

  Exercice 2

  Considérons par exemple : $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{2\,t+3}}\,dt$.

  Montrer que $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_3^9 \frac{u-3}{\sqrt{u}}\,du$ et en déduire la valeur de I.

Exercice 3

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)+\cos(x)}\,dx$ à l'aide du changement de variable $\boxed{t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}$.

IV. Méthodes de calculs d'intégrales

IV.1. Intégrande de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit $(b,c) \in \mathbb{R}^2$.

MÉTHODO **Calcul d'intégrale de type** $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$

On note Δ le discriminant du polynôme P défini par $P(X) = aX^2+bX+c$. Trois cas se présentent.

- si $\Delta > 0$, alors le polynôme P admet deux racines réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  1) On décompose la fraction rationnelle $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ en éléments simples.
  2) On est alors ramené à un intégrande du type $x \mapsto \alpha\left(\dfrac{\beta_1}{x-x_1} + \dfrac{\beta_2}{x-x_2}\right)$ dont on sait déterminer une primitive à vue.
- si $\Delta = 0$, alors le polynôme P admet une unique racine : $x_0 = \dfrac{b}{2a}$.
  1) On commence par remarquer : $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{1}{a\,(x-x_0)^2}\,dx$.
  2) On effectue le changement de variable $\boxed{t = x - x_0}$.
  3) On est alors ramené à un intégrande du type $t \mapsto \dfrac{1}{a\,t^2}$ dont on sait déterminer une promitive à vue.
- si $\Delta < 0$, alors :
  1) On commence par mettre l'expression ax^2+bx+c sous forme canonique. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2}\right)
\end{aligned}$$

  2) On effectue ensuite le changement de variable $\boxed{t = x + \dfrac{b}{2a}}$.
  3) On est alors ramené à un intégrande du type $t \mapsto \dfrac{1}{a}\,\dfrac{1}{t^2+\alpha^2}\,dt$ (où $\alpha = \sqrt{\dfrac{|\Delta|}{4a^2}}$) dont on sait déterminer une primitive à vue.

Exercice 4

1. Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+t+1}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$.

IV.2. Intégrande de la forme Polynôme × Exponentielle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Soit $c \in \mathbb{R}$.

MÉTHODO **Calcul d'intégrale de type** $\displaystyle\int (a_0 + \cdots + a_n\, x^n)\, \mathrm{e}^{cx}\ dx$

1) On commence par effectuer une IPP en dérivant la fonction polynomiale $x \mapsto a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n$ et en « primitivant » la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{cx}$.

2) On itère le procédé jusqu'à faire disparaître le terme polynomial.

⚠ Ne pas inventer de méthodes. Celle présentée ci-dessus n'est valide qu'avec la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{cx}$ où c est une constante.
En particulier, elle n'est pas valide avec des fonctions du type $\cancel{x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}}$, $\cancel{x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$, $\cancel{x \mapsto \mathrm{e}^{\ln(x)}}$...

Exercice 5 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 (2x+3)\, \mathrm{e}^x\ dx$.

IV.3. Intégrande de la forme Polynôme × Logarithme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

MÉTHODO **Calcul d'intégrale de type** $\displaystyle\int (a_0 + \cdots + a_n\, x^n)\ \ln(x)\ dx$

1) On commence par effectuer une IPP en dérivant la fonction ln et en « primitivant » la fonction polynomiale $x \mapsto a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n$.

2) On obtient une expression polynomiale dont on sait obtenir une primitive à vue.

Exercice 6

1) Calculer $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\ dx$.

2) Calculer $\displaystyle\int_1^2 (x^2+3)\ \ln(x)\ dx$.

IV.4. Intégrande de la forme Polynôme × Sinus/Cosinus

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

MÉTHODO **Calcul d'intégrale de type** $\displaystyle\int (a_0 + \cdots + a_n\, x^n)\ \cos(x)\ dx$

1) On commence par effectuer une IPP en dérivant la fonction polynomiale $x \mapsto a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n$ et en « primitivant » la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

2) On itère le procédé jusqu'à faire disparaître le terme polynomial.

On procède de la même manière pour une intégrale du type $\displaystyle\int (a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n)\ \sin(x)\ dx$.

Exercice 7

Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\ \cos(x)\ dx$.

IV.5. Intégrande de la forme Exponentielle × Sinus/Cosinus

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

MÉTHODO **Calcul de** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax} \cos(bx)\ dx$ **et** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\ dx$

1) On commence par écrire la fonction cos ou sin sous la forme d'une exponentielle complexe.

a) On écrit :

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{ax} \cos(bx)\ dx &= \int \mathrm{e}^{ax} \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{ibx}\right)\ dx \\ &= \int \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{e}^{ibx}\right)\ dx \\ &= \int \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{(a+ib)x}\right)\ dx\end{aligned}$$

b) On obtient de même : $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\ dx = \int \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{(a+ib)x}\right)\ dx$

2) On utilise les propriétés reliant l'intégrale avec la partie réelle et la partie imaginaire.

a) $\displaystyle\int \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{(a+ib)x}\right)\ dx = \operatorname{Re}\left(\int \mathrm{e}^{(a+ib)x}\ dx\right)$

b) $\displaystyle\int \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{(a+ib)x}\right)\ dx = \operatorname{Im}\left(\int \mathrm{e}^{(a+ib)x}\ dx\right)$

3) On calcule $\displaystyle\int \mathrm{e}^{(a+ib)x}\ dx$ grâce à une primitive à vue.

4) On conserve la partie réelle ou la partie imaginaire pour conclure.

N.B. : on procède de même si un polynôme est en facteur d'une telle expression.

Exercice 8
Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2x} \sin(3x)\ dx$.

IV.6. Intégrande de la forme Polynôme en Sinus et Cosinus

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

MÉTHODO **Calcul d'intégrale de type** $\displaystyle\int \sin^p(x) \cos^q(x)\ dx$

Trois se présentent :

- si p est impair :
  1) on effectue le changement de variable $\boxed{t = \cos(x)}$.
  2) on est ainsi ramené à un intégrande polynomiale dont on peut déterminer une primitive à vue.
- si q est impair :
  1) on effectue le changement de variable $\boxed{t = \sin(x)}$.
  2) on est ainsi ramené à un intégrande polynomiale dont on peut déterminer une primitive à vue.
- si p et q sont pairs :
  1) on linéarise $\sin^p(x) \cos^q(x)$
  2) on est ainsi ramené à un intégrande dont on peut déterminer une primitive à vue.

Exercice 9
Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(x) \cos^3(x)\ dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x) \sin^5(x)\ dx$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x) \sin^2(x)\ dx$